PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Giáo viên: Bùi Đức Quang

I. Kiến thức cơ bản

1. Các tính chất lũy thừa với số mũ thực

Cho các số $a > 0, b > 0$ và các số thực α, β tùy ý ta luôn có:

a) $a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

b) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$

c) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

d) $\left(ab\right)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha}$

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

f) $a^{\alpha} = a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta,\ (0 < a \neq 1)$

2. Các tính chất lôgarit

a) $\log_a b$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$

b) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $(0 < a \neq 1,\ b > 0,\ 0 < c \neq 1)$ (công thức đổi cơ số)

c) $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b,\ \left(b > 0,\ 0 < a \neq 1\right)$

d) $\log_a b^{2k} = 2k\log_a |b|,\ k \in \mathbb{Z}\ (0 < a \neq 1,\ b \neq 0)$

e) $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c,\ \left(b > 0,\ 0 < a \neq 1\right)$

f) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ c > 0,\ \left(b > 0\right) \end{cases}$, $(0 < a \neq 1)$

g) $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|,\ \left(0 < a \neq 1,\ bc > 0\right)$

h) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|,\ \left(0 < a \neq 1,\ bc > 0\right)$

3. Các tính chất về hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Hàm số mũ: $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

+ Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị: $(0; +\infty)$

+ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.

+ Đạo hàm: $\left(a^{u(x)}\right)' = u(x)'.a^{u(x)}.\ln a$ với $u = u(x)$ có đạo hàm trên J (J là khoảng hay hợp các khoảng) và $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J.

b) Hàm số lôgarit: $y = \log_a x,\ (0 < a \neq 1)$

+ Tập xác định: $(0; +\infty)$. Tập giá trị: $\mathbb{R}$

+ Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$

+ Đạo hàm của hàm hợp: $\left(\log_a u(x)\right)' = \dfrac{u(x)'}{u(x)\ln a}$ với $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J, $y = \log_a u(x)$ có đạo hàm trên J.

4. Phương trình mũ, phương trình lôgarit cơ bản

a. Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b\ (0 < a \neq 1)$

Phương pháp giải:

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a x = b\ (0 < a \neq 1)$

Phương pháp giải: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Như vậy, phương trình $\log_a x = b\ (0 < a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b.

II. Một số phương pháp giải về phương trình mũ và phương trình lôgarit

1. Phương pháp đưa về cùng một cơ số

Học sinh cần nắm vững các tính chất nêu trên.

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\frac{3}{2}\log_2(x+2)^2+6=-2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_2(x+6)^3$$

Hướng dẫn giải:

+ ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ 4-x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow -6<x<-2,\ -2<x<4$

+ Khi đó, pt $\Leftrightarrow \log_2|x+2|+2=\log_2(4-x)+\log_2(x+6)$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(4|x+2|\right)=\log_2\left[(4-x)(x+6)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+2|=(4-x)(x+6)>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1-\sqrt{33} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2,\ x=1-\sqrt{33}$.

Chú ý: Nếu biến đổi $\log_2(x+2)^2=2\log_2(x+2)$ thì sẽ làm mất nghiệm $x=1-\sqrt{33}$. Do đó ta phải nhớ rằng: $\log_a b^2=2\log_a|b|,\ (0<a\neq 1,\ b\neq 0)$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta thấy ngay cơ số $\frac{1}{4}$ có thể chuyển về cơ số 2. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp ta cần chọn cơ số trung gian để biến đổi các cơ số có trong phương trình mũ, lôgarit về cơ số trung gian đó.

Ví dụ 2: Giải phương trình $8^{x^3-2x^2+2}=4^{x^2+x+1}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $\Leftrightarrow (2^3)^{x^3-2x^2+2}=(2^2)^{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow 3(x^3-2x^2+2)=2(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x^2-2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy pt có ba nghiệm là $x=\dfrac{2}{3},\ x=1+\sqrt{3}$ và $x=1-\sqrt{3}$.

<u>Bài tập:</u> Giải các phương trình sau

1) $\dfrac{\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$ Đ/s: $x=48$

2) $5^{x+1}-5^x=2^{x+1}+2^{x+3}$ Đ/s: $x=1$

3) $\log_3 x+\log_4 x=\log_5 x$ Đ/s: $x=1$

4) $\log_{\frac{1}{6}}(\sin\dfrac{x}{2}-3\tan x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})+\log_6(\sin\dfrac{x}{2}-\tan 2x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})=0$

Đ/s: $x=\dfrac{5\pi}{6}+4k\pi,\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$

2. Phương pháp mũ hóa và lôgarit hóa

Để giải phương trình bằng phương pháp mũ hoá hoặc lôgarit hoá ta phải nắm vững các tính chất đã nêu ở trên. Tuy nhiên, trước khi mũ hoá hoặc lôgarit hoá cần phải biến đổi để rút gọn cả hai vế của phương trình về dạng đơn giản nhất, đặc biệt cần chú ý đến công thức đổi cơ số để đưa về cùng một cơ số. Phương pháp lôgarit hoá tỏ ra càng hiệu quả khi hai vế của phương trình có dạng tích các luỹ thừa.

Chúng ta chú ý các phép biến đổi cơ bản sau:

a) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

b) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$

c) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

d) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$

Ví dụ 1: Giải phương trình $3^x.2^{\frac{x+1}{x-1}} = 72$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $x \neq 1$. Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế ta có:

$$\log_3\left(3^x.2^{\frac{x+1}{x-1}}\right) = \log_3 72 \Leftrightarrow x + \frac{x+1}{x-1}\log_3 2 = 2 + 3\log_3 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (3 + 2\log_3 2)x + 4\log_3 2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x - 1 - 2\log_3 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 + 2\log_3 2 \end{array}\right.$$

Vậy pt đã cho có hai nghiệm $x = 2,\ x = 1 + 2\log_3 2$.

Chú ý: Khi gặp các phương trình có hai vế đều dương và là tích của nhiều luỹ thừa có cơ số và số mũ khác nhau (không thể đưa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ được), nếu lấy lôgarit với cơ số thích hợp (thường cơ số có trong phương trình cho tiện) ta có thể đưa phương trình đã cho thành phương trình đơn giản hơn đã biết cách giải.

Ví dụ 2: Giải phương trình $2^{x+3}-3^{x^2-2}=3^{x^2+1}-2^{x-1}$

Hướng dẫn giải:

$$2^{x+3}-3^{x^2-2}=3^{x^2+1}-2^{x-1}\Leftrightarrow\left(8+\frac{1}{2}\right).2^x=\left(3+\frac{1}{9}\right).3^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{153}{56}.2^x=3^{x^2}$$

Lấy lôgarit hai vế pt theo cơ số 3 ta được:

$$\log_3\left(\frac{153}{56}.2^x\right)=\log_3\left(3^{x^2}\right)\Leftrightarrow x^2-x.\log_3 2-\log_3\frac{153}{56}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2+4\log_3\frac{153}{56}}\right)$$

KL: Vậy pt có 2 nghiệm $x=\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2+4\log_3\frac{153}{56}}\right)$.

<u>Bài tập:</u> Giải các phương trình

1) $3^x.8^{\frac{x}{x+2}}=6$ Đ/s: $x=1, x=-2\left(1+\log_3 2\right)$

2) $5^x.3^{x^2}=1$ Đ/s: $x=0, x=-\log_3 5$

3) $\log_2\left(x^2+x+2\right)=3$ (THPT Quốc Gia 2015) Đ/s: $x=2, x=-3$

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

a. Phương pháp chung

Nếu một phương trình mũ hay phương trình lôgarit sau khi rút gọn có dạng $f(a^{\varphi(x)})=0$ hoặc $f(\log_a \varphi(x))=0$ trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số theo biến x. Khi đó, đặt $t=a^{\varphi(x)}$, $t>0$ hoặc $t=\log_a \varphi(x)$, ta được một phương trình đại số $f(t)=0$, giải phương trình này nếu có nghiệm t thì giải phương trình $a^{\varphi(x)}=t$ hoặc $\log_a \varphi(x)=t$ ta sẽ tìm được x.

Ví dụ 1: Giải phương trình $2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$

Đặt $t=2^{x^2+1}$, $t\geq 2$. Ta được pt:

$$\begin{aligned}8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}&\Leftrightarrow 8t=t^2+2t-1\\&\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3-\sqrt{10}\\t=3+\sqrt{10}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Đối chiếu đk ta có $t=3+\sqrt{10}$ thoả mãn. Khi đó

$$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow x^2=\log_2(3+\sqrt{10})-1=\log_2\frac{3+\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_2\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$$

Vậy pt có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{\log_2\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log^4(x-1)^2+\log^2(x-1)^3=25$.

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $x>1$.

Khi đó, pt $\Leftrightarrow 16\log^4(x-1)+9\log^2(x-1)=25$.

Đặt $t=\log^2(x-1), t\ge 0$ ta có: $16t^2+9t-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{25}{16}\end{array}\right.$

So sánh đk ta có $t=1$ là thoả mãn.

Khi $t=1 \Rightarrow \log^2(x-1)=1 \Leftrightarrow \log(x-1)=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=\dfrac{11}{10}\end{array}\right.$.

Vậy pt có hai nghiệm là $x=\dfrac{11}{10}$, $x=11$.

Chú ý: Học sinh thường mắc sai lầm là $\log^4(x-1)^2=2\log^4(x-1)$ và $\log^2(x-1)^3=3\log^2(x-1)$. Ta cần lưu ý:

$$\log_a^n b^m = m^n \log_a^n b, \left(0<a\ne 1, b>0\right)$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{2}{(2-\sqrt{3})}$

Hướng dẫn giải:

Pt$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^{x^2-2x}=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$

Nhận xét: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$.

Đặt $t=(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}$, do $x^2-2x\ge -1$ nên $t\ge 2-\sqrt{3}$.

Khi đó, pt trở thành $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1.$

Do vậy $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy pt có hai nghiệm là $x=0,\ x=2.$

Chú ý: Nếu đưa được phương trình đã về dạng $\alpha.a^{\varphi(x)}+\beta.b^{\varphi(x)}+\gamma=0$ mà $a.b=1$ thì dùng ẩn phụ $t=a^{\varphi(x)},(t>0)$ để đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai $\alpha.t^2+\gamma.t+\beta=0$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $2.4^{x^2+1}+6^{x^2+1}=9^{x^2+1}$

Hướng dẫn giải:

Pt $\Leftrightarrow 2.2^{2(x^2+1)}+(2.3)^{x^2+1}=3^{2(x^2+1)}$

Chia hai vế pt cho $2^{2(x^2+1)}\neq 0$, ta được $2+\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2+1)}$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}$, $t\geq \frac{3}{2} \Rightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}=2 \Leftrightarrow x^2+1=\log_{\frac{3}{2}}2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1}.$

Vậy pt có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1}$

Chú ý: Nếu biến đổi pt về dạng $\alpha.a^{2f(x)}+\beta.(ab)^{f(x)}+\gamma.b^{2f(x)}=0$ thì chia cả hai vế pt cho $b^{2f(x)}>0$(hoặc $a^{2f(x)},\ (ab)^{f(x)}$), ta được:

$$\alpha.\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+\beta.\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+\gamma=0$$

Đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$, $t>0$ ta có pt: $\alpha.t^2+\beta.t+\gamma=0$.

(có thể mở rộng cho dạng đẳng cấp bậc 3 như pt lượng giác)

b. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Trong phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó, hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Khi đó, ta có thể để phương trình ở dạng: "*chứa ẩn phụ nhưng hệ số vẫn chứa ẩn x*". Trong trường hợp này thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là bình phương của một số hay một biểu thức đơn giản nào đó.

Ví dụ 5: Giải phương trình $9^{x^2}+(x^2-3)3^{x^2}-2x^2+2=0$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=3^{x^2}$, điều kiện $t\geq 1$ vì $x^2\geq 0\Leftrightarrow 3^{x^2}\geq 3^0=1$.

Ta được: $t^2+(x^2-3)t-2x^2+2=0$ có:

$$\Delta=(x^2-3)^2-4(-2x^2+2)=(x^2+1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1-x^2\end{array}\right.$$

Với $t=2\Rightarrow 3^{x^2}=2\Leftrightarrow x^2=\log_3 2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_3 2}$

Với $t=1-x^2\Rightarrow 3^{x^2}=1-x^2$, ta có nhận xét

$$\begin{cases} VT \ge 1 \\ VP \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có ba nghiệm $x = \pm\sqrt{\log_3 2}$ và $x = 0$.

Tương tự với phương trình lôgarit sau:

Ví dụ 6: Giải phương trình $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0$. Ta có $\Delta = \left(x-5\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 3 - x \end{array}\right.$

Khi $t = -2 \Rightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

Khi $t = 3 - x \Rightarrow \log_2 x = 3 - x$

Ta thấy $y = \log_2 x$ là hàm số đồng biến, $y = 3 - x$ là hàm số nghịch biến trên txđ $D = \left(0;+\infty\right)$ nên pt này nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất, lại có $x = 2$ là một nghiệm. Vậy pt có nghiệm là $x = \dfrac{1}{4},\ x = 2$.

Chú ý: Sai lầm cơ bản của học sinh trong bài này là lúng túng không biết đặt ẩn phụ $t = \log_2 x$ để đưa về phương trình bậc hai ẩn số t. Có thể học sinh nhận xét $y = \log_2^2 x + (x-1)\log_2 x$ là hàm số đồng biến, $y = 6 - 2x$ là hàm số nghịch biến trên $D = \left(0;+\infty\right)$. Điều này chưa chính xác vì làm mất nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$.

c. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Ví dụ 7: Giải phương trình

$$\sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}+2\sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=6$$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ 3+\log_2(x^2-4x+5)\geq 0 \\ 5-\log_2(x^2-4x+5)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2-\sqrt{31}\leq x\leq 2+\sqrt{31}$

Đặt $u=\sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)},\ v=\sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}$, $(u,\ v\geq 0)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} u+2v=6 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ (6-2v)^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=\dfrac{2}{5} \\ v=\dfrac{14}{5} \end{cases}$

Khi $\begin{cases} u=2 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}=2 \\ \sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2(x^2-4x+5)=1$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+5=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Khi $\begin{cases} u=\dfrac{14}{5} \\ v=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}=\dfrac{2}{5} \\ \sqrt{5-\log_{25}(x^2-4x+5)}=\dfrac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2(x^2-4x+5)=-\dfrac{71}{25}$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5=2^{-\frac{71}{25}}$ pt này vô nghiệm.

Vậy pt có hai nghiệm phân biệt $x=1,\ x=3$.

Chú ý: Với ví dụ trên bằng việc sử dụng hai ẩn phụ (giả sử là $u,\ v$), ta có thể khéo léo đưa việc giải phương trình về việc xét một hệ, trong đó:

- Phương trình thứ nhất có được từ phương trình đầu bài.
- Phương trình thứ hai có được từ việc đánh giá mối quan hệ của $u,\ v$.

Tương tự với phương trình mũ :

Ví dụ 8: Giải phương trình $\dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{2^x}{2^x+2}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Hướng dẫn giải:

Viết lại pt dưới dạng $\dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{1}{2^{1-x}+1}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Đặt $u=2^{x-1}+1,\ v=2^{1-x}+1\quad (u,\ v>1)$.

Khi đó $uv=(2^{x-1}+1)(2^{1-x}+1)=2^{x-1}+2^{1-x}+2=u+v$, do vậy ta có hệ pt:

$$\begin{cases}\dfrac{8}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{18}{u+v}\\ u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+8v=18\\ u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v=2\\ u=9,v=\dfrac{9}{8}\end{array}\right.$$

Với $u=v=2$ ta được $\begin{cases}2^{x-1}+1=2\\ 2^{1-x}+1=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Với $u=9,\ v=\dfrac{9}{8}$ ta được $\begin{cases}2^{x-1}+1=9\\ 2^{1-x}+1=\dfrac{9}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1$ và $x=4$.

Chú ý : Học sinh cũng có thể đặt ẩn phụ $t=2^x$.

Bên cạnh phương pháp đặt ẩn phụ ở trên, ta có thể sử dụng phương pháp "*chuyển phương trình thành hệ gồm hai ẩn là một ẩn phụ và một ẩn x*":

Ví dụ 9: Giải phương trình $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\cot x > 0,\ \cos x > 0$

Khi đó, pt $\Leftrightarrow \log_3 \cot^2 x = \log_2 \cos x$

Đặt $\log_3 \cot^2 x = \log_2 \cos x = t \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2^t \\ \cot^2 x = 3^t \end{cases}$

Mà $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{4^t}{1-4^t} = 3^t \Leftrightarrow 4^t = 3^t(1-4^t) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$

Giải pt ta được $t = -1$ là nghiệm duy nhất, do đó pt đã cho có nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. Đối chiếu đk $\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm pt đã cho.

Chú ý: Hs không đặt đk sẽ dẫn tới thừa nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ bởi trong quá trình biến đổi ta đã mở rộng tập xác định của pt.

Với phương trình $\log_a f(x) = \log_b g(x)$ mà việc đưa về cùng cơ số hay cùng biểu thức trong lôgarit gặp khó khăn ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để giải hay đặt ẩn phụ $t = \log_a f(x) = \log_b g(x)$ để mũ hóa đưa về hệ phương trình: $\begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$.

d. Đặt ẩn phụ dạng lượng giác

Ví dụ 10: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-2^{2x}}} = \left(1+2\sqrt{1-2^{2x}}\right).2^x$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $1-2^{2x}\ge 0 \Leftrightarrow 2^{2x}\le 1 \Leftrightarrow x\le 0$.

Như vậy $0<2^x\le 1$, đặt $2^x=\sin t$ với $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta được:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t}=(1+2\cos t)\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=\sin t+\sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{t}{2}=0\\ \sin\dfrac{3t}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{6}\\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=\dfrac{1}{2}\\ 2^x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ và $x=0$.

Chú ý: Có thể đặt ẩn phụ $t=2^x$ nhưng việc giải quyết phức tạp hơn.

e. Đặt ẩn phụ cho hằng số

Ý tưởng chủ đạo của bài này:

- Sử dụng hằng số làm ẩn phụ, sau đó tìm lại x theo hằng số.

- Nếu phương trình có chứa tham số m ta có thể coi m là ẩn, còn x là tham số và sau đó tìm lại x theo m.

Ví dụ 11: Giải phương trình $\log^4 x+\log^3 x-2\log^2 x-9\log x-9=0$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $x>0$

Đặt $t=\log x$, ta có $t^4+t^3-2t^2-9t-9=0 \Leftrightarrow 3^2+3t.3-t^4-t^3+2t^2=0$.

Đặt $u=3$, ta được $u^2+3t.u-t^4-t^3+2t^2=0$.

Xét pt bậc hai theo u ta có $\Delta = (2t^2+t)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-t^2-2t \\ u=t^2-t \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3=-t^2-2t \\ 3=t^2-t \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \log x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x=10^{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=10^{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$.

Bài tập: Giải các phương trình sau

1) $49^{\frac{1}{x}}-35^{\frac{1}{x}}=25^{\frac{1}{x}}$ Đ/s: $x=\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{7}{5}$

2) $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$ Đ/s: $x=-2$

3) $7^{x-1}=1+2\log_7(6x-5)^3$ Đ/s: $x=1$ và $x=2$

4) $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$ với $x\in\left[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right]$ Đ/s: $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}+\sin\frac{\pi}{6}=\cos 2x+\log_4(3\cos 2x-1)$

Như vậy phương pháp đặt ẩn phụ là phương pháp rất hay dùng để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit, ta khéo léo đặt ẩn phụ thích hợp để đưa phương trình về dạng đại số với ẩn mới, giải bài toán này tìm nghiệm thế vào ta sẽ được phương trình cơ bản hoặc phương trình đơn giản hơn.

Khi đặt ẩn phụ ta cần tìm điều kiện thích hợp cho ẩn phụ, để rút ngắn bớt ở các bước giải tiếp theo và nhất là trong các bài toán liên quan tới tham số.

4. Phương pháp áp dụng tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit

Có một số phương pháp không thể dùng thuần tuý các phương pháp nêu trên, đôi khi phải sử dụng:

+ Các tính chất đơn điệu của các hàm số

+ Hoặc phát hiện nghiệm rồi chứng minh nghiệm đó là duy nhất

+ Hoặc sử dụng tính chất bất đẳng thức để giải

+ Hoặc phát hiện tập hợp chứa các nghiệm rồi thử nghiệm…

Ví dụ 1: Giải pt $(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)=0$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \\ 8x-2x^2-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \\ x^2-4x+3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Các nghiệm chỉ có thể là $x=1;\ x=3$.

Thử vào phương trình có $x=1$ là thoả mãn.

Ví dụ 2: Giải phương trình $2^x+3^x=5^x$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó, ta có $2^x+3^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x-1=0$

Đặt $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x-1$ ta được $f(x)$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=0$, do vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chú ý: Ở ví dụ trên ta đã chia hai vế phương trình cho 5^x (có thể chia cho 2^x hai vế phương trình) sau đó sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình.

Nói chung ta thường sử dụng các tính chất sau:

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến hoặc nghịch biến trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = k$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. Cụ thể, khi giải pt loại này ta thực hiện theo các bước sau:

+ Chuyển phương trình về dạng $f(x) = k$

+ Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số là đơn điệu (giả sử là đồng biến).

Nhận xét: - Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$ do đó $x = x_0$ là nghiệm.

- Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > k$ do đó pt vô nghiệm.

- Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < k$ do đó pt vô nghiệm.

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến hoặc nghịch biến trong khoảng $(a;b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ với mọi hàm số $u = u\left(x\right)$, $v = v\left(x\right)$ xác định và nhận giá trị thuộc khoảng $(a;b)$.

Cụ thể, khi giải phương trình loại này ta thực hiện theo các bước sau:

+ Chuyển phương trình về dạng $f(u) = f(v)$

+ Xét hàm số $y = f(t)$. Dùng lập luận khẳng định hs là đơn điệu

+ Khi đó phương trình được chuyển về dạng $u = v$

Tính chất 3: Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $(a;b)$ và hàm số $y=g\left(x\right)$ là một hàm hằng hoặc nghịch biến trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Do đó, nếu tồn tại $x_0\in(a;b): f(x_0)=g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=g(x)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\log_2(x^2-4)+x=\log_2\left[8(x+2)\right]$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

Khi đó, pt $\Leftrightarrow \log_2(x^2-4)-\log_2(x+2)=3-x$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2-4}{x+2}=3-x \Leftrightarrow \log_2(x-2)=3-x$$

Hàm số $y=\log_2(x-2)$ là hàm đồng biến, hàm số $y=3-x$ là hàm nghịch biến trên $\left(2;+\infty\right)$. Lại có $x=3$ là một nghiệm của pt.

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $3^x+5^x=6x+2$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có $3^x+5^x=6x+2 \Leftrightarrow 3^x+5^x-6x-2=0$.

Đặt $f(x)=3^x+5^x-6x-2 \Rightarrow f'(x)=3^x\ln 3+5^x\ln 5-6$

Vì $f'(0)<0, f'(1)>0$ và $f'(x)$ là hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=\alpha$.

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f^{'}(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tối đa là 2 điểm. Kiểm tra ta có phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0,\ x = 1.$

Đối với các pt hỗn hợp nhiều dạng hàm số khác nhau, phương pháp sử dụng các tính chất của hàm số là phương pháp hữu hiệu nhất.

Chú ý: Dạng bài tập này là dạng toán khó, thường khi sử dụng các phương pháp trên vẫn không giải được ta phải nghĩ đến cách này. Khéo léo đưa phương trình về dạng có hai vế là hai hàm số có tính chất đơn điệu khác nhau, chỉ ra nghiệm và kết luận đó là nghiệm duy nhất.

Nếu phương trình nào có nhiều hơn một nghiệm ta cần dựa vào bảng biến thiên để suy ra kết luận.

Ví dụ 5: Giải phương trình $3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2+1) - \log_2 x$

Hướng dẫn giải:

ĐKXĐ: $x > 0$

Ta có $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = \log_2(x + \frac{1}{x}) \geq \log_2 2 = 1$

(Áp dụng bđt Cauchy cho hai số dương x và $\frac{1}{x}$), đẳng thức xảy ra khi $x = 1.$

Ta xét $y=3x^2-2x^3=x^2(3-2x)$ trên $(0;+\infty)$ được $y_{\max}=1$ khi $x=1$.

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chú ý: Học sinh thường mắc sai lầm ở bài này là không chú ý đến điều kiện $x>0$ nên không so sánh $\log_2(x+\frac{1}{x})$ với 1 được.

Ở bài này ta đã sử dụng phương pháp đánh giá :

Xét pt: $f\left(x\right)=g\left(x\right), x\in D$ trong đó nếu với $\forall x\in D\Rightarrow\begin{cases} f\left(x\right)\ge M \\ g\left(x\right)\le M \end{cases}$ thì phương trình tương đương với $f\left(x\right)=g\left(x\right)=M$.

Ví dụ 7: Giải phương trình $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x}{2^x+1}+\dfrac{1}{2^x+4^x}=\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $a=2^x,\ b=4^x(a,\ b>0)$. Khi đó, ta có pt: $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned} VT &= (\frac{a}{b+1}+1)+(\frac{b}{a+1}+1)+(\frac{1}{a+b}+1)-3 \\ &=(a+b+1)(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b})-3 \\ &=\frac{1}{2}\left[(b+1)+(a+1)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \\ &\ge\frac{1}{2}.3.\sqrt[3]{(b+1)(a+1)(a+b)}.\frac{3}{\sqrt[3]{(b+1)(a+1)(a+b)}}-3=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

do đó pt $\Leftrightarrow b+1=a+1=a+b\Leftrightarrow a=b=1\Rightarrow 2^x=4^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Chú ý: Bài toán trên rất nhiều học sinh nhầm tưởng rằng có thể giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ $t = 2^x$, nhưng khi đó ta lại nhận được phương trình bậc 6 theo ẩn t và việc giải rất phức tạp.

Với phương trình sử dụng phương pháp đánh giá, chúng ta cần nắm vững các tính chất của hàm số mũ, lôgarit và các bất đẳng thức thì sẽ nhanh chóng chỉ ra được tập nghiệm của nó.

<u>Bài tập:</u> Giải các phương trình sau

1) $e^{|2x-5|} - e^{|x-1|} = \frac{1}{|2x-5|} - \frac{1}{|x-1|}$ Đ/s: $x = 4, x = 2$

2) $2^{|x|} = \sin x^2$ Đ/s: $x \in \phi$

3) $3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}$ Đ/s: $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

4) $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2 - 25) = 0$ Đ/s: $x = 6$

5) $\log_2^2 \tan x + \log_2(\sin^2 x)\log_2(\cos^2 x) = 1$ Đ/s: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\left[\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3(x^2-1)\right]} = \sqrt{2(x-1)}$ Đ/s: $x = 3$

7) $6^x + 2^x = 5^x + 3^x$ Đ/s: $x = 0, x = 1$

8) $4^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x} = 2x$ Đ/s: $x = 1; x = 3$

9) $3^x = 1 + x + \log_3(1+2x)$ Đ/s: $x = 0, x = 1$

10) $3^{\cos x} - 2^{\cos x} = \cos x$ Đ/s: $x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.