

# BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = \frac{5}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}.$$

**Bài 2.** Cho các số  $x, y \geq 0$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}.$$

**Bài 3.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$K = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

**Bài 4.** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 - xy + y^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

**Bài 5.** Với mọi số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2(x^2 + y^2) = xy + 1$ . Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1}.$$

**Bài 6.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 + xy + 2y^2}{y^2 + 1}.$$

**Bài 7.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{ab}.$$

**Bài 8.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \text{ (Đề khối B năm 2011)}.$$

**Bài 9.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a + b)(ab + 3)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 9\left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) - 16\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 25\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

**Bài 10.** Cho  $x, y > 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{xy + \sqrt{x^4 + 9x^2y^2}}{8y^2 + x^2}.$$

**Bài 11.** Cho  $x, y > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)\left(x + \sqrt{x^2 + 12y^2}\right)}.$$

**Bài 12.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $xy \leq y - 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} - \frac{x - 2y}{6(x + y)}.$$

**Bài 13.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $3x^2 + 8y^3 = 20$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{(x - y)^2}.$$

**Bài 14.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $a \neq b$  và  $a^2 + 2b = 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a - b)^2}.$$

**Bài 15.** Cho  $x, y > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4 + y^4}{(x + y)^4} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \geq \frac{5}{8}.$$

**Bài 16.** Cho  $x, y > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x + y)^3}}.$$

**Bài 17.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ . Tìm GTNN biểu thức :

$$P = (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

**Bài 18.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 = 64c^3$ . Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a + c)(c + b)} + \frac{ab}{c(a + b)}.$$

**Bài 19.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{4a^2 - 27}{b^2 + c^2} + \frac{4b^2 - 27}{c^2 + a^2} + \frac{4c^2 - 27}{a^2 + b^2}.$$

**Bài 20.** Cho  $a, b, c \geq 0$  phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(c - b)^2} + \frac{1}{(a - c)^2} \right) \geq \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

**Bài 21.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \left( a + b + \frac{25c}{2} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

**Bài 22.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \sqrt{\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \leq 2.$$

**Bài 23.** Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{24}{13x + 12\sqrt{xy} + 16\sqrt{yz}} - \frac{3}{\sqrt{x+y+z}}.$$

**Bài 24.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x \leq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} + \frac{3z}{z+x}.$$

**Bài 25.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{2}{\sqrt{a+b+c}}.$$

**Bài 26.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}.$$

**Bài 28.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

**Bài 29.** Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{3x^2+yz}} + \frac{y}{\sqrt{3y^2+zx}} + \frac{z}{\sqrt{3z^2+xy}}.$$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

**Bài 31.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b^3}{a(b^2+c^2)} + \frac{ca^2}{b(a^2+b^2)} + \frac{5ca}{(c+a)^2} - \frac{6\sqrt{ca}}{c+a}.$$

**Bài 32.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $(a+c)(b+c)=4c^2$ . Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{3c+a} + \frac{ab}{bc+ca}.$$

**Bài 33.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x > y$  và  $xy + (x + y)z + z^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}.$$

**Bài 34.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

**Bài 35.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xz + y^2 = 2yz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{(xy)^2 - xy^3 + 4y^4}} + \frac{2y^2 + z^2}{\sqrt{(yz)^2 - yz^3 + 4z^4}}.$$

**Bài 36.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

**Bài 37.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{4 + \sqrt{x}}{4 - x} + \frac{4 + \sqrt{y}}{4 - y} + \frac{4 + \sqrt{z}}{4 - z} \geq 5.$$

**Bài 38.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a + b + c} \geq 4 \left( \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right).$$

**Bài 39.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^4}{\sqrt[3]{a^3 + 7}} + \frac{b^4}{\sqrt[3]{b^3 + 7}} + \frac{c^4}{\sqrt[3]{c^3 + 7}}.$$

**Bài 40.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a + b = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2 + 6a^2 + 9a^4} + \frac{1}{2 + 6b^2 + 9b^4}.$$

**Bài 41.** Cho  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a + b + c)^3 = 32abc$ . Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

$$M = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a + b + c)^4}.$$

**Bài 42.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a - 2c}{\sqrt{ab + bc + ca}}.$$

**Bài 43.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $7(a^2 + b^2 + c^2) = 11(ab + bc + ca)$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{51}{28} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \leq 2.$$

**Bài 44.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}}{\sqrt[3]{abc}}.$$