

SỬ DỤNG AM-GM VÀ CAUCHY-SCHWARZ

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC DẠNG PHÂN THỨC

Bài 1. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + xz)$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc \neq 0; a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{27}{4|ab + bc + ca|}.$$

Bài 3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y \leq z$. Chứng minh rằng:

$$(x^4 + y^4 + z^4) \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right) \geq \frac{297}{8}.$$

Bài 4. Cho $x, y, z \geq 0$ sao cho không tồn tại hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y} + \frac{\sqrt{yz}}{y + z} \geq 2.$$

Bài 5. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^8 + y^8 + z^8 = \frac{1}{27}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^7}{y^2 + z^2} + \frac{y^7}{z^2 + x^2} + \frac{z^7}{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$ và $a \geq c$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{(c+a)^2}{a(b+c) + c(b+a)}.$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a \leq b + c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c}{a+b} + (b+c) \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{a+c} \right).$$

Bài 8. Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{3} \left(\frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{yz}{x^2} \right) + \left(\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \right)^2.$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{3a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + ab + 2b^2}} + \frac{3b^2 + c^2}{\sqrt{b^2 + bc + 2c^2}} + \frac{3c^2 + a^2}{\sqrt{c^2 + ca + 2a^2}}.$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{8(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 1.$$

Bài 11. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{8(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2 + ab+bc+ca} \geq \frac{7}{2}.$$

Bài 12. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{16}{(b+c)^2}.$$

Bài 13. Cho các số thực x, y, z thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 y^2}{1-xy} + \frac{z^2 y^2}{1-zy} + \frac{x^2 z^2}{1-xz}.$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}.$$

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab+bc+ac}}{ac(a+b+c)} + \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2bc}}.$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{ab^2}{(b^2+ac)(a+c)} + \frac{16c^4}{(a+c)^4}.$$

Bài 17. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + 6z^2 = 4z(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{y(x+z)^2} + \frac{y^3}{x(y+z)^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$S = \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}.$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + a^2 + c^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab+c}} + \frac{b+c}{\sqrt{bc+a}} + \frac{c+a}{\sqrt{ca+b}} \geq 3.$$

Bài 22. Cho các số thực x, y, z thuộc khoảng $(1; \sqrt{2})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{xy^2}{4y^2z - z^2x} + \frac{yz^2}{4z^2x - x^2y} + \frac{zx^2}{4x^2y - y^2z}.$$

Bài 23. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn các điều kiện $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c - 1)$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}.$$

Bài 24. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x}{x^2 + yz} + \frac{y}{y^2 + zx} + \frac{z}{z^2 + xy}.$$

Bài 25. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + 2b^3}{4ab + 3a^2} + \frac{b^3 + 2c^3}{4bc + 3b^2} + \frac{c^3 + 2a^3}{4ca + 3c^2}.$$

Bài 26. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3.$$

Bài 27. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a + b} + \frac{b^2c}{2b + c} + \frac{c^2a}{2c + a} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 28. Cho $a, b, c \geq 0$ sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b + c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a + c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a + b)^3}} \geq 1.$$

Bài 29. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2(c + a)} + \frac{1}{b^2(a + b)} + \frac{1}{c^2(b + c)}.$$

Bài 30. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^4(b + c)} + \frac{1}{b^4(c + a)} + \frac{1}{c^4(a + b)}.$$

Bài 31. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y + z)}{yz} + \frac{y^2(z + x)}{zx} + \frac{z^2(x + y)}{xy}.$$

Bài 32. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a + b} + \frac{b^2c}{2b + c} + \frac{c^2a}{2c + a} \leq 1.$$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $(a+b)(a+2b) \leq c(b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Bài 35. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{xyz}} \geq \frac{4}{3}(x+y+z).$$

Bài 36. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2} \right)} - \frac{1}{64} \left(\frac{a^4b^4 + b^4c^4}{a^4c^4} \right).$$

Bài 37. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) \geq 4.$$

Bài 38. Chứng minh rằng với mọi số thực $a, b, c > 0$, ta luôn có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{ab}{a^2+bc+ca} + \frac{bc}{b^2+ca+ab} + \frac{ca}{c^2+ab+bc}.$$