SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NAM ĐỊNH

BÁO CÁO

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC DẠNG PHÂN THỨC

Sưu tầm và biên soạn: TRẦN ĐỨC THIỆN

TRƯỜNG THPT LÝ TỰ TRỌNG

Nam Định, tháng 3 năm 2016

A. ĐỊNH NGHĨA BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

+) Hàm số $f\left(a,b,\mathrm{c}\right)$ xác định trên miền D được gọi là hàm số thuần nhất k nếu với mọi số thực $t \neq 0$ ta đều có $f\left(ta,tb,tc\right)=t^k f\left(a,b,\mathrm{c}\right)$. (*Định nghĩa tương tự đối với hàm số có chứa nhiều biến*).

+) Bất đẳng thức có dạng $f\left(a,b,\mathrm{c}\right)\geq 0$ trong đó $f\left(a,b,\mathrm{c}\right)$ là một hàm số thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất. Khi đó các bất đẳng thức $f\left(a,b,\mathrm{c}\right)>0,\ f\left(a,b,\mathrm{c}\right)\leq 0$ và $f\left(a,b,\mathrm{c}\right)<0$ cũng được gọi là bất đẳng thức thuần nhất.

+) Bất đẳng thức phân thức đồng bậc dạng phân thức là một trường hợp riêng của bất đẳng thức thuần nhất.

B. MỘT SỐ KIẾN THỨC THƯỜNG SỬ DỤNG

1. Các bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng

1.1. Bất đẳng thức Cauchy hay AG-MG

Cho $a,b>0$, ta có $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

1.2. Bất đẳng thức Bunhiakovsky hay BCS

Cho $a,b,x,y\in\mathbb{R}$, ta có $\left(ax+by\right)^2\leq\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$.

1.3. Các bất đẳng thức hệ quả thường dùng

1.3.1. Cho $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $a^2+b^2\geq 2ab$.

1.3.2. Cho $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $\left(a+b\right)^2\geq 4ab$.

1.3.3. Cho $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$.

1.3.4. Cho $a,b>0$, ta có $a^3+b^3\geq\dfrac{\left(a+b\right)^3}{4}\geq a^2b+ab^2$.

1.3.5. Cho $a,b>0$, ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$.

1.3.6. Cho $a,b>0$ và $x,y\in\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$$ **(BĐT Cauchy - Swarchz).**

1.3.7. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$, ta có $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca$.

1.3.8. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$, ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$.

1.3.9. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$, ta có $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$.

1.3.10. Cho $a,b,c>0$, ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$.

1.3.11. Cho $a,b,c>0$ và $x,y,z\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$ **(BĐT Cauchy - Swarchz).**

1.3.12. Cho $a,b>0$ và $ab\ge 1$, ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

1.3.13. Cho $a,b>0$ và $ab\le 1$, ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số nhiều biến bằng phương pháp hàm số

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số nhiều biến bằng phương pháp hàm số, thông thường ta thực hiện các bước như sau:

- Sử dụng biến đổi đại số, biến đổi các số hạng chứa trong biểu thức về cùng một đại lượng giống nhau.
- Biến đổi hàm nhiều biến thành thành hàm một biến, giả sử là biến t bằng cách đặt t bằng đại lượng được biến đổi ở trên.
- Giới hạn t, giả sử $t\in D$.
- Khảo sát hàm số $f(t)$ theo biến t trên tập D. Từ đó ta tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t\in D$.

Chú ý: Trong trường hợp không thể xây dựng trực tiếp hàm số $f(t)$ với $t \in D$, ta có thể sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá biểu thức đang cần tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (giả sử biểu thức đó là *P*) về dạng:

- $P \geq f(t)$ với $t \in D$ đối với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất.
- $P \leq f(t)$ với $t \in D$ đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất.

C. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC DẠNG PHÂN THỨC

Phương pháp 1. Sử dụng các biến đổi đại số cơ bản làm giảm số biến của bài toán.

Phương pháp 2. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản đánh giá để làm giảm số biến của bài toán.

Phương pháp 3. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến.

Phương pháp 4. Sử dụng phương pháp đạo hàm theo từng biến.

Phương pháp 5. Sử dụng hàm số đặc trưng.

Phương pháp 6. Chuẩn hóa bất đẳng thức.

Phương pháp 7. Phương pháp dồn biến.

Phương pháp 1. Sử dụng các biến đổi đại số cơ bản làm giảm số biến của bài toán

Bài 1. Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(a+b-c)(a+b+c)+2c(a+b)}{c(a+b+2c)}.$$

Nhận xét: Biểu thức *A* là biểu thức có dạng phân thức, có bậc ở tử và mẫu cùng là bậc 2. Coi biểu thức *A* là một hàm số có chứa 3 biến, ta có thể sử dụng các biến đổi đại số cơ bản (chia cả tử và mẫu của biểu thức *A* cho c^2 hoặc đặt $\begin{cases} a=xc \\ b=yc \end{cases}$) để biến đổi hàm số đó thành một một hàm số mới có chứa hai biến.

Lời giải

Giả thiết đã cho biến đổi thành $(a+b-c)^2=ab \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)^2=\frac{a}{c}\frac{b}{c}$.

Đặt $x=\frac{a}{c};y=\frac{b}{c}$ vì $a,b,c>0 \Rightarrow x,y>0$. Giả thiết trở thành: $xy=(x+y-1)^2$.

Áp dụng bđt: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow(x+y-1)^2\le\frac{(x+y)^2}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x+y\le 2$.

Biến đổi biểu thức đã cho:

$$A=\frac{(a+b)^2+2c(a+b)-c^2}{c(a+b+2c)}=\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2+2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)-1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+2}=\frac{(x+y)^2+2(x+y)-1}{(x+y)+2}.$$

Đặt $t=x+y\Rightarrow\frac{2}{3}\le t\le 2$, khi đó *A* trở thành: $A=\frac{t^2+2t-1}{t+2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t+2}$ trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{(t+2)^2}>0,\ \forall t\in\left[\frac{2}{3};2\right]$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Do đó $f(t)\le f(2),\ \forall t\in\left[\frac{2}{3};2\right]\Rightarrow A\le\frac{7}{4},\forall t\in\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Vậy $\text{Max}\, A = \dfrac{7}{4}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Bài 2. Cho ba số thực dương đôi một khác nhau $a,b,\ c$ thỏa mãn $\begin{cases} ab+bc=2c^2 \\ 3a \le c \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2a-2b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$$ (*Đề thi KSCL HK 1 – Nam Định 2015-2016*).

Lời giải

Từ giả thiết $c > 0$, do đó ta có

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{2\frac{a}{c} - 2\frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{a}{c}}.$$

Đặt $x = \dfrac{a}{c}, y = \dfrac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ vì $a,b,c > 0$. Do đó

$$P = \frac{x}{2x-2y} + \frac{y}{y-1} + \frac{1}{1-x}.$$

Từ giả thiết $\begin{cases} \frac{a}{c}\frac{b}{c} + \frac{b}{c} = 2 \\ \frac{a}{c} \le \frac{1}{3} \end{cases}$ hay $\begin{cases} xy + y = 2 \\ x \le \frac{1}{3} \end{cases}$, đó đó $y = \dfrac{2}{x+1}$ và $0 < x \le \dfrac{1}{3}$.

Thay $y = \dfrac{2}{x+1}$ vào P ta được

$$P = \frac{x}{2x - \frac{4}{x+1}} + \frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{2}{x+1} - 1} + \frac{1}{1-x} = \frac{x^2+x}{2x^2+2x-4} + \frac{3}{1-x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+x}{2x^2+2x-4} + \dfrac{3}{1-x}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-8x-4}{4(x-1)^2(x+2)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{3x^2+4x+8}{4(x-1)^2(x+2)^2} > 0,\ \forall x \in \left(0;\dfrac{1}{3}\right] \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$

$$\Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{61}{14},\ \forall x \in \left(0;\frac{1}{3}\right].$$

Vậy $\text{Max}\, P = \dfrac{61}{14}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases} ab + bc = 2c^2 \\ 3a = c \end{cases} \Leftrightarrow 9a = 2b = 3c > 0.$

Nhận xét: Ở bài toán trên khi ta biến đổi giả thiết $ab + bc = 2c^2$ thành $\dfrac{a}{c}\dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{c} = 2$ khi đó giúp ta phát hiện ra cách biến đổi biểu thức *P* có dạng là hàm số có chứa 3 biến thành hàm số chứa hai biến.

Bài 3. Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $\left(a + b + c\right)c = 3ab$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3ac}{(a+c)b} + \frac{3bc}{(b+c)a} - c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$ *(Đề thi HSG Thanh Hóa 2014-2015).*

Lời giải

Vì $a, b, c > 0$ ta có

$$P = \frac{3\dfrac{a}{c}}{\left(\dfrac{a}{c} + 1\right)\dfrac{b}{c}} + \frac{3\dfrac{b}{c}}{\left(\dfrac{b}{c} + 1\right)\dfrac{a}{c}} - \left(\frac{1}{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{b}{c}\right)^2}\right).$$

Đặt $x = \dfrac{a}{c}, y = \dfrac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ vì $a, b, c > 0$. Biến đổi biểu thức *P* trở thành

$$P = \frac{3x}{(x+1)y} + \frac{3y}{(y+1)x} - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Ta có $\left(a + b + c\right)c = 3ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} + 1 = 3\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{c} \Leftrightarrow x + y + 1 = 3xy$.

Biến đổi biểu thức *P* ta có

$$P = \frac{3x^2\left(y+1\right) + 3y^2\left(x+1\right)}{(xy + x + y + 1)xy} - \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = \frac{3xy\left(x+y\right) - \left[\left(x+y\right)^2 - 2xy\right]}{4x^2y^2}.$$

Đặt $t = xy \Rightarrow x + y = 3t - 1$. Khi đó P trở thành

$$P = \frac{5t - 1}{4t^2}.$$

Ta lại có

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (3t-1)^2 \geq 4t \Rightarrow t \in \left(0;\frac{1}{9}\right] \cup [1;+\infty).$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{5t-1}{4t^2}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{9}\right] \cup [1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-5t}{4t^3}$ vì $t \in \left(0;\dfrac{1}{9}\right] \cup [1;+\infty) \Rightarrow f'(t)>0$ khi $0<t \leq \dfrac{1}{9}$ và $f'(t)<0$ khi $t \geq 1$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0			$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-9		1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \leq f(1)=1, \forall t \in \left(0;\dfrac{1}{9}\right] \cup [1;+\infty)$ hay $P \leq 1$.

Vậy $\operatorname{Max} P=1$ giá trị lớn nhất đạt được khi khi $a=b=c$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^3+b^3=c^3 \\ a \neq c; b \neq c \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Lời giải

Vì $a, b, c>0$ và $a \neq c; b \neq c$ do đó ta có $P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-1}{\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\left(1-\dfrac{b}{c}\right)}$.

Đặt $x=\dfrac{a}{c}; y=\dfrac{b}{c}$, vì $a, b, c>0 \Rightarrow x, y>0$.

Khi đó biểu thức P trở thành: $P=\dfrac{x^2+y^2-1}{(1-x)(1-y)}=\dfrac{(x+y)^2-2xy-1}{-(x+y)+xy+1}$.

Từ giả thiết ta có

$$a^3+b^3=c^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3=1 \Leftrightarrow x^3+y^3=1 \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=1.$$

Đặt $t=x+y \Rightarrow xy=\dfrac{t^3-1}{3t}$, khi đó

$$P=\frac{t^2-2\dfrac{t^3-1}{3t}-1}{-t+\dfrac{t^3-1}{3t}+1}=\frac{t^3-3t+2}{t^3-3t^2+3t-1}=1+\frac{3}{t-1}.$$

Do $x,y>0 \Rightarrow \begin{cases} t>1 \\ t^2 \ge 4.\dfrac{t^3-1}{3t} \end{cases} \Rightarrow 1<t\le \sqrt[3]{4}$.

Xét $f(t)=1+\dfrac{3}{t-1}$ trên $\left(1;\sqrt[3]{4}\right]$. Ta có $f'(t)=-\dfrac{3}{(t-1)^2}<0$, $\forall t\in\left(1;\sqrt[3]{4}\right]$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left(1;\sqrt[3]{4}\right]$, do đó

$$f(t)\ge f\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1},\ \forall t\in\left(1;\sqrt[3]{4}\right] \text{ hay } P\ge\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

Vậy $\text{Min}\,P=\dfrac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b, c=\sqrt[3]{2}$.

Bài 5. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+y}{2x-y}+\frac{z+y}{2z-y}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $x,z>0$, do đó ta có

$$P=\frac{1+\dfrac{y}{x}}{2-\dfrac{y}{x}}+\frac{1+\dfrac{y}{z}}{2-\dfrac{y}{z}}.$$

Đặt $a=\dfrac{y}{x}, b=\dfrac{y}{z} \Rightarrow a,b>0$ vì $x,y,z>0$. Khi đó $P=\dfrac{1+a}{2-a}+\dfrac{1+b}{2-b}$.

Mặt khác thừ giả thiết ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{y}{z}=2 \Leftrightarrow a+b=2 \Rightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a,b\in(0;2) \end{cases}.$$

Do đó

$$P=\frac{1+a}{2-a}+\frac{1+(2-a)}{2-(2-a)}=\frac{2a^2-4a+6}{2a-a^2}.$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{2a^2-4a+6}{2a-a^2}$ trên $(0;2)$. Ta có

$$f'(a)=\frac{12a-12}{\left(2a-a^2\right)^2} \Rightarrow f'(a)=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Bảng biến thiên

t	0		1		2
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a)\ge f(1)=4,\ \forall a\in(0;2)$.

Vậy $\operatorname{Min} P=4$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=1$ hay $x=y=z$.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để có thể giải bài toán trên là ta biến đổi biểu thức P trở thành $P=\frac{1+\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}+\frac{1+\frac{y}{z}}{2-\frac{y}{z}}$ và biến đổi giả thiết thành $\frac{y}{x}+\frac{y}{z}=2.$ Khi đó ta dễ dàng biến đổi được biểu thức P trở thành hàm có chứa một biến.

Bài 6. Cho $a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a^2+b^2+c^2\ne 0$ thỏa mãn $(a+b+c)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$ (*Đề thi HSG Nghệ An 2010*).

Nhận xét: Điểm mấu chốt ta sử dụng giả thiết biến đổi $ab+bc+ca$ thành:

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\right]=\frac{1}{4}(a+b+c)^2.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\right]\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{1}{4}(a+b+c)^2.$$

Do đó

$$S=\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{16}\left[\left(\frac{4a}{a+b+c}\right)^3+\left(\frac{4b}{a+b+c}\right)^3+\left(\frac{4ac}{a+b+c}\right)^3\right].$$

Đặt: $x=\dfrac{4a}{a+b+c}, y=\dfrac{4b}{a+b+c}, z=\dfrac{4c}{a+b+c}$

Ta có:

$$S=\frac{1}{16}\left(x^3+y^3+z^3\right)=\frac{1}{16}\left[x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)\right]$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{16}\left(3x^3-12x^2+12x+16\right).$$

Do: $\begin{cases}x+y+z=4\\xy+yz+zx=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=4-x\\yz=x^2-4x+4\end{cases}$.

Vì $(y+z)^2\geq 4yz$ nên $0\leq x\leq\dfrac{8}{3}$.

Xét hàm số: $f(x)=3x^3-12x^2+12x+16$ với $x\in\left[0;\dfrac{8}{3}\right]$, $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $\left[0;\dfrac{8}{3}\right]$. Ta có: $f'(x)=9x^2-24x+12\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ (t/m).

Ta lại có: $f(0)=16; f(2)=16; f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{176}{9}; f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{176}{9}$

$\Rightarrow \underset{\left[0;\frac{8}{3}\right]}{\text{Min}}\, f(x)=16;\ \underset{\left[0;\frac{8}{3}\right]}{\text{Max}}\, f(x)=\dfrac{176}{9}$.

Vậy $\text{Min}\,S=1$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=0; b=c\neq 0$

$\text{Max}\,S=\dfrac{11}{9}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a=b; c=4a; a\neq 0$.

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{33}{4}.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{xy}{z^2}=\frac{x+y}{z}$.

Mặt khác ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{1}{z}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{x+y}{z}\ge 4$.

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$VT=\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{z}{x+y}=\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\frac{z}{x+y}-2\frac{x+y}{z}.$$

Đặt $t=\frac{x+y}{z}\Rightarrow t\ge 4$. Khi đó ta có $VT=t^2+\frac{1}{t}-2t$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{1}{t}-2t$ trên $[4;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=\frac{2t^3-2t^2-1}{t^2}=\frac{2(t-4)\left(t^2+4t+15\right)+119}{t^2}>0,\ \forall t\ge 4.$$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[4;+\infty)$ do đó $f(t)\ge f(4)=\frac{33}{4},\ \forall t\ge 4.$

Vậy $\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\frac{z}{x+y}-2\frac{x+y}{z}\ge 4$, với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$

Do đó $\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{33}{4}$, với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2z.$

Bài 8. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac\ge 2b$ và $(ac+b)(ab+c)-a^2c^2=4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\left(1+\frac{b}{ac}\right)^2+\left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2.$$

Nhận xét: Biểu thức $P=\left(1+\frac{b}{ac}\right)^2+\left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2$ không có dạng đồng bậc, tuy nhiên nếu ta đặt $x = ac$ biểu thức *P* trở thành $P = \left(\frac{x+b}{x}\right)^2 + \left(\frac{x+b}{x-b}\right)^2$, khi đó biểu thức *P* có dạng đồng bậc do đó ta dễ dàng biến đổi được *P* về hàm có chứa một biến.

Lời giải

Ta có

$$(ac+b)(ab+c) - a^2c^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{ab}{c} + 1\right) = a^2 + \frac{4b^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{ab}\right) = \frac{ac}{b} + 4.\frac{b}{ac} \Leftrightarrow \frac{ac}{b} + 4.\frac{b}{ac} = \left(a + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{b}{ac}}\right) (*).$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{ac}{b}}$ $\left(t \geq \sqrt{2}\right)$, do đó

$$(*) \Leftrightarrow t^2 + \frac{4}{t^2} \geq 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow (t-2)\left(t^3 - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \text{(vì } t \geq \sqrt{2}\text{) hay } \frac{ac}{b} \geq 4.$$

Lại có

$$P = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{b}{ac}}{1 - \frac{b}{ac}}\right)^2 = (1+u)^2 + \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 \text{ (đặt } u = \frac{b}{ac}\text{)}.$$

Với $u = \frac{b}{ac} \Rightarrow 0 < u \leq \frac{1}{4}$ vì $a, b, c > 0$ và $\frac{ac}{b} \geq 4$.

Xét hàm số $f(u) = (1+u)^2 + \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2$ trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có $f'(u) = 2(1+u) + \frac{4(u+1)}{(1-u)^3} > 0, \forall u \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$ $\Rightarrow f(u)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$

$$\Rightarrow f(u) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{625}{144}, \forall u \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

Vậy $\text{Max}\, P = \frac{625}{144}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases} ac = 4b \\ ab = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2b \end{cases}$.

Phương pháp 2. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản đánh giá để làm giảm số biến của bài toán

Bài 9. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z\ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{10y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{x+2y}{2x+3y}$$ (*Đề thi HSG Nam Định 2013-2014*).

Lời giải

Ta có $x+2y-z\ge 0\Leftrightarrow z\le x+2y\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z\le 2x+3y\\ 10y+z\le x+12y\end{cases}$.

Do đó ta có

$$P=\frac{x}{10y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{x+2y}{2x+3y}\ge\frac{x}{x+12y}+\frac{y}{2x+3y}+\frac{x+2y}{2x+3y}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{x}{x+12y}+\frac{x+3y}{2x+3y}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12}+\frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}.$$

Đặt $t=\frac{x}{y}\Rightarrow t>0.$ Khi đó ta có $P\ge\frac{t}{t+12}+\frac{t+3}{2t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{t+12}+\frac{t+3}{2t+3}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có

$$f'(t)=\frac{12}{(t+12)^2}-\frac{3}{(2t+3)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow(t+12)^2=4(2t+3)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in(0;+\infty)\\ t=-\frac{18}{5}\notin(0;+\infty)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{6}{7}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{6}{7}, \forall t \in (0;+\infty)$.

Hay $P \geq \frac{6}{7}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2y, z = 4y$.

Vậy $\text{Min}\, P = \frac{6}{7}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 2y, z = 4y$.

Cách 2. (*Lời giải được trình bày trong đáp án của đề thi HSG*)

Coi *P* là hàm của *z* và *x, y* là tham số ta có

$$P'(z) = -\frac{x}{(10y+z)^2} - \frac{y}{(x+y+z)^2} < 0, \forall z \in (0; x+2y].$$

Suy ra *P*(*z*) nghịch biến trên $(0; x+2y]$.

$$\Rightarrow P \geq P(x+2y) = \frac{x}{x+12y} + \frac{x+3y}{2x+3y} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12} + \frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}.$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ suy ra $P \geq \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3}$ với $t \in (0;+\infty)$.

Đặt $f(t) = \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3}$ với $t \in (0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{12}{(t+12)^2} - \frac{3}{(2t+3)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \in (0;+\infty) \\ t = -\frac{18}{5} \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{6}{7}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{6}{7}$.

Vậy $P \ge \frac{6}{7}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2y, z = 4y$.

Vậy $\text{Min}\, P = \frac{6}{7}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 2y, z = 4y$.

Bài 10. Cho $x,\ y,\ z$ là ba số thực thuộc đoạn $\left[1;4\right]$ và $x \ge y; x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \text{ (\textit{Đề thi Khối A – 2011})}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Cho $a,\ b > 0$ thỏa mãn $a.b \ge 1$. Khi đó ta có: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ $\left(1\right)$.

Thật vậy $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab} - 1\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0$ luôn đúng với mọi $a,\ b > 0$ thỏa mãn $a.b \ge 1$.

Vì $x, y, z \in \left[1;4\right]$ do đó ta có

$$P = \frac{1}{2 + 3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} \ge \frac{1}{2 + 3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow t \in \left[1;2\right]$ vì $x,\ y \in \left[1;4\right]$ và $x \ge y.$ Do đó ta có

$$P \ge \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}.$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$ trên $\left[1;2\right]$. Ta có

$$f'\left(t\right) = \frac{-2\left[t^3\left(4t-3\right) + 3t\left(2t-1\right) + 9\right]}{\left(2t^2+3\right)^2\left(1+t\right)^2} < 0,\ \forall t \in \left[1;2\right].$$

Do đó $f\left(t\right)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[1;2\right]$

$$\Rightarrow f\left(t\right) \ge f\left(2\right) = \frac{34}{33},\ \forall t \in \left[1;2\right].$$

Vậy $\text{Min}\, P = \frac{34}{33}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 4, y = 1, z = 2.$

Bài 11. Cho các số thức $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Lời giải

Vì $c > 0$ do đó ta có

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}.$$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ (vì $a,\ b,\ c > 0$) khi đó biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Biến đổi giả thiết $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ ta thu được

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2y^2 = 2\left(x^2+y^2\right).$$

Ta có

$$x^2y^2 = 2\left(x^2+y^2\right) \ge (x+y)^2 \Rightarrow xy \ge x+y$$

$$x^2+y^2+1 = (x+y)^2 - 2xy + 1 \le (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2 \qquad (1)$$

Ta lại có

$$(x+y)^2 \ge 4xy \ge 4(x+y) \Rightarrow x+y \ge 4 \quad (2) \quad (\text{vì } x, y > 0)$$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+1} \le x+y-1$.

Biến đổi biểu thức P ta thu được

$$P + 2 = \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\Rightarrow P+2 \geq (x+y+1)\frac{4}{x+y+2}+\frac{1}{x+y-1}$$

$$\Rightarrow P \geq 2-\frac{4}{x+y+2}+\frac{1}{x+y-1}.$$

Đặt $t=x+y \Rightarrow t \geq 4.$ Do đó

$$P \geq 2-\frac{4}{t+2}+\frac{1}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=2-\frac{4}{t+2}+\frac{1}{t-1}$ trên $[4;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2} \geq 0, \forall t \in [4;+\infty)$ và $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4$ (vì $t \in [4;+\infty)$) suy ra

$f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4;+\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(4)=\frac{5}{3}, \forall t \in [4;+\infty) \text{ hay } P \geq f(t) \geq \frac{5}{3}.$$

Vậy $\text{Min}\, P=\frac{5}{3}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=2c.$

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8} \quad \textit{(Đề thi IMO 2005).}$$

Lời giải

Ta có

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\frac{1}{8}\frac{1}{8}}=\frac{3}{4}\frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}\frac{a}{a+b}.$$

Tương tự ta có: $\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}\frac{b}{b+c}$ và $\left(\frac{c}{c+a}\right)^3+\frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}\frac{c}{c+a}.$

Suy ra

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right).$$

Do đó để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{3}{2}\quad(1)\text{ (với } a,b,c>0\text{)}.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\ xyz=1\end{cases}$ (vì $a,b,c>0$).

Do đó bất đẳng thức

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{3}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $z\le1\Rightarrow xy\ge1$.

Ta có

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\ \text{ (vì } xy\ge1\text{)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}+\frac{1}{1+z}=\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}\ \text{ với } t=\sqrt{z}.$$

Vì $z\le1\Rightarrow t\le1$, xét hàm số $f(t)=\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}$ trên $(0;1]$.

Ta có $f(t)$ là hàm số xác định và liên tục trên $(0;1]$.

Ta lại có $f'(t)=\frac{2}{(1+t)^2}-\frac{2t}{(1+t^2)^2}<\frac{2}{(1+t^2)^2}-\frac{2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t)}{(1+t^2)^2}<0,\ \forall t\in(0;1)$

(vì $t\in(0;1)\Rightarrow1+2t+t^2>1+2t^2+t^4$).

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1]$ do đó $f(t)\ge f(1)=\frac{3}{2},\ \forall t\in(0;1]$.

Hay $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{3}{2}$ với mọi $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

Vậy $\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\ge\frac{3}{8}$ với mọi $a,b,c>0$.

Bài 13. Cho các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a\ge b, a\ge c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{5(a+b+c)}+\frac{b}{5a-2c}+\frac{c}{5a-2b}$$

Lời giải

Vì $a>0$ do đó

$$P=\frac{1}{5\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)}+\frac{\frac{b}{a}}{5-2\frac{c}{a}}+\frac{\frac{c}{a}}{5-2\frac{b}{a}}.$$

Đặt $\begin{cases} x=\frac{b}{a} \\ y=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x,y\in(0;1]$ vì $a,b,c>0$ và $a\ge b, a\ge c$.

Khi đó biểu thức P được viết lại như sau:

$$P=\frac{1}{5(1+x+y)}+\frac{x}{5-2y}+\frac{y}{5-2x}$$

$$\Rightarrow 2P-2=\frac{2}{5(1+x+y)}+(2x+2y-5)\left(\frac{1}{5-2x}+\frac{1}{5-2y}\right).$$

Ta có $\frac{1}{5-2x}+\frac{1}{5-2y}\ge\frac{4}{10-2x-2y}$ và $2x+2y-5<0,\ \forall x,y\in(0;1]$.

Do đó

$$2P-2\le\frac{2}{5(1+x+y)}+(2x+2y-5)\frac{4}{10-2x-2y}$$

hay

$$P\le\frac{1}{5(1+x+y)}+\frac{5}{5-x-y}-1.$$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\in(0;2]$ vì $x,y\in(0;1]$. Khi đó ta có

$$P\le\frac{1}{5(t+1)}+\frac{5}{5-t}-1.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{5(1+t)}+\frac{5}{5-t}-1$ trên $(0;2]$.

Ta có $f'(t)=\frac{25(t+1)^2-(t-5)^2}{5(t+1)^2(t-5)^2}=\frac{24t^2+60t}{5(t+1)^2(t-5)^2}>0,\ \forall t\in(0;2]$.

Do đó $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;2\right] \Rightarrow f\left(t\right) \le f\left(2\right) = \dfrac{11}{15}, \forall t \in \left(0;2\right]$ hay $P \le \dfrac{11}{15}$, với mọi $a,b,c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a \ge b, a \ge c$.

Vậy $\text{Max}\, P = \dfrac{11}{15}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c$.

Bài 14. Cho các số thực $a,b,c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}.$$

Nhận xét: Ở **bài 14** các biến a và b có tính chất đối xứng do đó ta sử dụng đánh giá cơ bản $4ab \le \left(a+b\right)^2$ khi đó dễ dàng làm giảm số biến của bài toán.

Lời giải

Ta có

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + 4ab} \ge \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M.$$

Do $a,b,c \in [1;2]$ nên $a + b \ne 0$, nên chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\dfrac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a,b,c \in [1;2]$ và $t = \dfrac{c}{a+b} \Rightarrow t \in \left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

Ta có $f^{/}(t) = \dfrac{-2(t+2)}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0,\ \forall t \in \left[\dfrac{1}{4};1\right] \Rightarrow f^{/}(t)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$

$$\Rightarrow f(t) \ge f(1) = \frac{1}{6}, \forall t \in \left[\frac{1}{4};1\right] \text{ hay } P \ge \frac{1}{6}.$$

Vậy $\text{Min}\, P = \dfrac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1$ và $c = 2$.

Bài 15. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2}$$ (*Đề thi chuyên Hùng Vương Gia Lai - 2015*).

Nhận xét: Ta chỉ cần biến đổi $2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2 = z^2 + 4(x+y)z + 4xy$ khi đó **bài 15** có cách giải tương tự như **bài 14**.

Lời giải

Biến đổi biểu thức P trở thành

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + 4xy}.$$

Ta có $4xy \le (x+y)^2$ do đó

$$P \ge \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + (x+y)^2} = \frac{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}.$$

Đặt $t = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, vì x, y, z thuộc đoạn $[1;2] \Rightarrow t \in [1;4]$, khi đó ta có $P \ge \frac{t^2}{1+4t+t^2}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{1+4t+t^2}$ trên $[1;4]$.

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{\left(1+4t+t^2\right)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [1;4]$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;4]$ do đó

$$\Rightarrow f(t) \ge f(1) = \frac{1}{6}, \forall t \in [1;4] \text{ hay } P \ge \frac{1}{6}, \ \forall\ x, y, z \in [1;2].$$

Vậy $\operatorname{Min} P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ và $z = 2$.

Bài 16. Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

Nhận xét: Ở **bài 16** từ giả thiết ta nhận thấy các biến a và b có tính chất đối xứng, do đó để giải bài toán ta sử dụng đánh giá cơ bản sau $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$P\ge\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c^2}{(a+b+c)^2}=\frac{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+2}{2\left(\frac{a+b}{c}+1\right)^2}\text{ (vì } c>0).$$

Với hai số thực x,y tuy ý, ta có

$$x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2\ge\frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Từ giả thiết $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$ sử dụng đánh giá trên ta thu được

$$c^2=c+a^3+b^3=c+(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge c+\frac{(a+b)^3}{4}\ge 2\sqrt{c.\frac{(a+b)^3}{4}}\Rightarrow 0\le\frac{a+b}{c}\le 1.$$

Đặt $t=\frac{a+b}{c}\Rightarrow 0\le t\le 1$ (vì $a,\ b\ge 0$ và $c>0$). Khi đó $P\ge\frac{t^2+2}{2(t+1)^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2}{2(t+1)^2}$ trên $[0;1]$, ta có

$$f'(t)=\frac{t-2}{(t+1)^3}<0,\ \forall t\in[0;1].$$

Do đó $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$

$$\Rightarrow f(t)\ge f(1)=\frac{3}{8},\ \forall t\in[0;1].$$

Hay $P \ge \frac{3}{8}, \ \forall a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$.

Vậy $\text{Min}\, P = \frac{3}{8}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Bài 17. Cho $x,\ y,\ z \ge 0$ thoả mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}.$$

Lời giải

Ta có

$$P = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3.$$

Ta lại có

$$\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \ge \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z}\right)^3$$

hay

$$\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \ge \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3.$$

Vậy

$$P \ge \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3.$$

Đặt $t = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow t \in [0;1)$. Khi đó $P \ge \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$ trên $[0;1)$.

Ta có $f'(t) = \frac{189t^2 + 6t - 3}{4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{9} \in [0;1) \\ t = -\frac{1}{7} \notin [0;1) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{9}$		1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{16}{81}$	$\nearrow$	16

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}, \forall t \in [0;1) \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{16}{81}$.

Vậy $\text{Min } P = \frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 4z$.

Bài 18. Cho ba số thức dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 z}{y^2\left(xz + y^2\right)} + \frac{y^4}{z^2\left(xz + y^2\right)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$$ (*Đề thi thử THTT số 453*)

Lời giải

Ta có

$$P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}}.$$

Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a.b.c = 1 \\ c > 1 \end{cases}$, khi đó P trở thành

$$P = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c} = \frac{a^3 + b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{ab(a+b)}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c} = \frac{1}{c} + c^2 + \frac{15}{c} = c^2 + \frac{16}{c}.$$

Xét hàm số $f(c) = c^2 + \frac{16}{c}$ trên $(1; +\infty)$.

Ta có $f'(c) = 2c - \frac{16}{c^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 2.$

Bảng biến thiên

c	1		2		$+\infty$
$f'(c)$		-	0	+	
$f(c)$	17	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(c) \geq f(2) = 12, \forall c \in (1;+\infty)$.

Vậy $\text{Min}\, P = 12$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases} a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ c = 2 \end{cases}$ hay $z = \sqrt{2}y = 2x$.

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Lời giải

Đặt $a = xc, b = yc\ (x, y \geq 1)$.

Thay $x=1$ vào giả thiết ta có: $\sqrt{b-c}=\sqrt{b} \Rightarrow c=0$ (không thỏa mãn giả thiết)

Tương tự $y=1$ cũng không thỏa mãn .

$\Rightarrow x>1, y>1$ thay vào giả thiết ta có:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2+2\sqrt{(x-1)(y-1)}=xy$$

$$\Leftrightarrow xy-x-y+1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(y-1)}=1 \Leftrightarrow xy=x+y\geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4.$$

Mặt khác

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{xy+x}+\frac{y^2}{xy+y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{(x+y)^2-2xy}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{(x+y)^2-2xy}$$

hay

$$P \geq \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy} = \frac{(xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 3}{3\left[(xy)^2 - 2xy\right]}.$$

Đặt $t = xy, t \geq 4$, khi đó ta có $P \geq \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{t^2 - 2t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{t^2 - 2t}$ trên $[4; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{(t^2 - 2t)^2} > 0,\ \forall t \geq 4$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[4; +\infty) \Rightarrow \underset{[4;+\infty)}{\text{Min}}\, f(t) = f(4) = \frac{41}{8}$.

Vậy $\text{Min}\, P = \frac{41}{24}$ *khi* $x = y = 2$ *hay* $a = b = 2c$.

Bài 20. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{ac(a + b + c)}.$$

Lời giải

Đặt $a = xb, c = yb \Rightarrow 0 < y \leq 1 \leq x$

Khi đó

$$T = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x + y + xy}}{xy(x + y + 1)} \geq \frac{(x+y)^2\sqrt{x + y + xy}}{2xy(x + y + 1)}.$$

Đặt $S = x + y; P = xy$ vì $0 < y \leq 1 \leq x \Rightarrow \begin{cases} S > 1 \\ (x-1)(y-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \leq S - 1$

Đặt $f(P) = \frac{S^4(S+P)}{4P^2(S+1)^2}$, ta có $f'(P) = -\frac{S^4(2S+P)}{4P^3(S+1)^2} < 0,\ \forall P \in (0; S-1]$.

Do đó $f(P)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; S-1]$

$$\Rightarrow f\left(P\right) \geq f\left(S-1\right) = \frac{S^4\left(2S-1\right)}{4\left(S^2-1\right)^2}, \forall P \in \left(0; S-1\right].$$

Xét $g\left(S\right) = \dfrac{S^4\left(2S-1\right)}{4\left(S^2-1\right)^2}$ với $S > 1$.

Ta có

$$g'\left(S\right) = \frac{\left(S-2\right)\left(S^2+2S-1\right)S^3}{2\left(S^2-1\right)^3} \Rightarrow g'\left(S\right) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \text{ (vì } S > 1\text{)}.$$

Bảng biến thiên

S	1		2		$+\infty$
$g'\left(S\right)$		-	0	+	
$g\left(S\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $g\left(S\right) \geq g\left(2\right) = \dfrac{4}{3}, \forall S \in \left(1; +\infty\right)$.

Do đó ta có $T \geq \sqrt{f\left(P\right)} \geq \sqrt{g\left(S\right)} \geq \sqrt{g\left(2\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\operatorname{Min} T = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ hay $a = b = c$.

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}.$$

Nhận xét: Bài 21 khi ta thay giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vào biểu thức P thì P là một biểu thức đồng bậc.

Lời giải

Ta có

$$\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}=\frac{xy}{\left(x^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)}+\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+z^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le \frac{xy}{2\sqrt{\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{yz}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+y^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{2yz}+\frac{y^2}{2xy}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right).$$

Ta lại có

$$x^3y^3+y^3z^3\ge \frac{1}{4}(xy+yz)^3 \Rightarrow \frac{x^3y^3+y^3z^3}{x^3z^3}\ge \frac{1}{4}\frac{(xy+yz)^3}{x^3z^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3$$

Vậy $P\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{96}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3$.

Đặt $t=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\Rightarrow t>0$ (vì $x,y,z>0$), khi đó $P\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{96}t^3$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{96}t^3$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\frac{1}{32}t^2+\frac{1}{8}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$ (vì $t>0$.)

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{5}{12}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\le f(2)=\frac{5}{12},\ \forall t\in(0;+\infty)$ hay $P\le f(t)\le \frac{5}{12}$.

Vậy $\text{Max}\, P = \frac{5}{12}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 22. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2z^2}{y^2 + z^2} - \frac{3z}{2x + z}.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\frac{x}{z} + 2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 . \left(\frac{y}{z}\right)^4} + \frac{z}{x} = 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{x}{z} + 2 \geq 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x}.$$

Đặt $t = \frac{x}{z} \Rightarrow t > 0$ vì $x, z > 0$. Do đó ta có

$$t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Ta có

$$P = \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{2}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1}.$$

Nhận xét: $\frac{x}{y} . \frac{y}{z} = \frac{x}{z}$ vì $\frac{x}{z} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} . \frac{y}{z} \leq 1$. Mặt khác $x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}, \frac{y}{z} > 0$.

Do đó ta có

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + \frac{x}{y} . \frac{y}{z}} = \frac{2}{1 + \frac{x}{z}}.$$

Vậy $\quad P \leq \frac{4}{1 + \frac{x}{z}} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1} = \frac{4}{1 + t} - \frac{3}{2t + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{1 + t} - \frac{3}{2t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-10t^2-4t+2}{(t+1)^2(2t+1)^2}<0,\ \forall t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

$$\Rightarrow f(t)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6},\ \forall t\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Hay $P\le\dfrac{7}{6}$ với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4+\left(\dfrac{y}{z}\right)^4+\dfrac{z}{x}=\dfrac{x}{z}+2$.

Vậy $\text{Max}\,P=\dfrac{7}{6}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases}z=2x\\ y=\sqrt{2}x\end{cases}$.

Phương pháp 3. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến

Để chứng minh một bài toán bất đẳng thức bằng cách sử dụng phương pháp tiếp tuyến thì **định lý** được trình bày dưới đây là cơ sở lý thuyết quan trọng giúp ta vận dụng

Định lý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên $[a;b]$.

1) Nếu $f''(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$ và $f''(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc đoạn $[a;b]$, ta luôn có $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x_0 \in [a;b]$.
2) Nếu $f''(x) \leq 0, \forall x \in [a;b]$ và $f''(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc đoạn $[a;b]$, ta luôn có $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x_0 \in [a;b]$.

Đẳng thức xảy ra ở hai bất đẳng thức trên khi $x = x_0$.

Chứng minh

1) Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0),\ \forall x \in [a;b], \forall x_0 \in [a;b]$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, do $f''(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$ và $f''(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc đoạn $[a;b]$ nên $f'(x)$ là hàm đồng biến trên $[a;b]$. Do đó $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0.

Bảng biến thiên

x	a		x_0		b
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(a)$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$g(b)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(x) \geq g(x_0),\ \forall x \in [a;b]$

$$\Leftrightarrow f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \geq 0,\ \forall x \in [a;b]$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \geq 0,\ \forall x \in [a;b]$$

2) Chứng minh tương tự.

Nhận xét: Hệ thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ chính là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm x_0.

Nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ và $f''(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc đoạn $[a;b]$, thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại tiếp điểm bất kỳ có hoành độ thuộc đoạn $[a;b]$ luôn nằm phía dưới đồ thị hàm số.

Nếu $f''(x) \le 0, \forall x \in [a;b]$ và $f''(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc đoạn $[a;b]$, thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại tiếp điểm bất kỳ có hoành độ thuộc đoạn $[a;b]$ luôn nằm phía trên đồ thị hàm số.

Bài 23. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}.$$

Nhận xét: Khi ta thay giả thiết $a+b+c=1$ vào biểu thức *P*, khi đó *P* có dạng đồng bậc

$$P = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + a^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + b^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + c^2}.$$

Lời giải

Vì $a,b,c > 0$ và $a+b+c = 1 \Rightarrow a,\, b,\, c \in (0;1)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ trên $(0;1)$, khi đó tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại tiếp điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$ là $y = -\dfrac{27}{50}x + \dfrac{27}{25}$.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+1} - \left(-\frac{27}{50}x + \frac{27}{25}\right) = \frac{27x^3 - 54x^2 + 27x - 4}{50(x^2+1)} = \frac{(3x-4)(3x-1)^2}{50(x^2+1)} \le 0,\ \forall x \in (0;1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le -\frac{27}{50}x + \frac{27}{25},\ \forall x \in (0;1).$$

Vì $a,\, b,\, c \in (0;1)$ do đó ta có

$$\frac{1}{a^2+1} \le -\frac{27}{50}a + \frac{27}{25}$$

$$\frac{1}{b^2+1} \le -\frac{27}{50}b + \frac{27}{25}$$

$$\frac{1}{c^2+1} \le -\frac{27}{50}c + \frac{27}{25}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \le -\frac{27}{50}\left(a+b+c\right) + \frac{81}{25} \Rightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \le \frac{27}{10}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét: Từ lời giải trên một câu hỏi đặt ra là tại sao lại viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $f\left(t\right) = \frac{t^3+1}{3t^2-4t+11}$ tại tiếp điểm có hoành độ bằng 1 mà không viết tại tiếp điểm khác. Trả lời được câu hỏi trên thì việc sử dụng phương pháp tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức trở nên đơn giản.

Bài 24. Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \le \frac{27}{8}.$$

Nhận xét: Tương tự như **bài 23** bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức đồng bậc, tuy nhiên nhìn bài toán ta khó có thể thấy được việc sử dụng phương pháp tiếp tuyến, do đó để giải được bài toán trước hết ta phải sử dụng bất đẳng thức cơ bản $ab \le \frac{\left(a+b\right)^2}{4}$.

Lời giải

Ta có

$$ab \le \frac{\left(a+b\right)^2}{4} = \frac{\left(1-c\right)^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{1-ab} \le \frac{4}{3+2c-c^2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \le \frac{1}{3+2a-a^2} + \frac{1}{3+2b-b^2} + \frac{1}{3+2c-c^2}.$$

Do đó để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta cần chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3+2a-a^2} + \frac{1}{3+2b-b^2} + \frac{1}{3+2c-c^2} \le \frac{27}{32} \text{ với } a,b,c>0 \text{ và } a+b+c=1.$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$ trên khoảng $\left(0;1\right)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{-27}{256}x+\dfrac{81}{256}$.

Xét $f\left(x\right)-\left(\dfrac{-27}{256}x+\dfrac{81}{256}\right)=\dfrac{1}{3+2x-x^2}+\dfrac{27}{256}x-\dfrac{81}{256}=\dfrac{\left(3x-1\right)^2\left(13-3x\right)}{256\left(3+2x-x^2\right)}\le 0$ với mọi $x\in\left(0;1\right)$, do đó $f\left(x\right)\le -\dfrac{27}{256}x+\dfrac{81}{256}$ với mọi $x\in\left(0;1\right)$.

Từ đó ta có

$$\frac{1}{3+2a-a^2}+\frac{1}{3+2b-b^2}+\frac{1}{3+2c-c^2}\le -\frac{27}{256}\left(a+b+c\right)+3.\frac{81}{256}=\frac{27}{32}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

Nhận xét: Đối với bài toán ở trên ta viết tiếp tuyến của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$ tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$ vì ta đoán trước được dấu bằng xảy ra của bài toán là $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 25. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}+\frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}+\frac{c^3+a^3}{3c^2-4ca+11a^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}=b.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+11}.$$

Do đó vế trái của bất đẳng thức được biến đổi thành

$$VT=b.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+11}+c.\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^3+1}{3\left(\frac{b}{c}\right)^2-4\frac{b}{c}+11}+a.\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^3+1}{3\left(\frac{c}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}+11}.$$

Vì $a,b,c>0 \Rightarrow \frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}>0$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{t^3+1}{3t^2-4t+11}$ trên $\left(0;+\infty\right)$, khi đó tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại tiếp điểm có hoành độ bằng 1 là $y=\frac{13}{50}t-\frac{3}{50}$.

Ta có:

$$\frac{t^3+1}{3t^2-4t+11}-\left(\frac{13}{50}t-\frac{3}{50}\right)=\frac{\left(t-1\right)^2\left(11t+81\right)}{50\left(3t^2-4t+11\right)}\ge 0,\ \forall t>0.$$

Do đó

$$\frac{t^3+1}{3t^2-4t+11}\ge\frac{13}{50}t-\frac{3}{50},\ \forall t>0.$$

Vì $\frac{a}{b}>0$ suy ra

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+11}\ge\frac{13}{50}\frac{a}{b}-\frac{3}{50}\Rightarrow b.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+11}\ge\frac{13a-3b}{50}\ \text{(vì } b>0\text{)}.$$

Tương tự ta có

$$c.\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^3+1}{3\left(\frac{b}{c}\right)^2-4\frac{b}{c}+11}\ge\frac{13b-3c}{50}$$

$$a.\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^3+1}{3\left(\frac{c}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}+11}\ge\frac{13c-3a}{50}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$b.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+11}+c.\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^3+1}{3\left(\frac{b}{c}\right)^2-4\frac{b}{c}+11}+a.\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^3+1}{3\left(\frac{c}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}+11}\ge\frac{1}{5}\left(a+b+c\right)=\frac{3}{5}$$

hay

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}+\frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}+\frac{c^3+a^3}{3c^2-4ca+11a^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 26. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9}\ge 9.$$

Lời giải

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức ta thu được

$$VT=x^3\left(\frac{1}{xy+9}+\frac{1}{zx+9}\right)+y^3\left(\frac{1}{xy+9}+\frac{1}{yz+9}\right)+z^3\left(\frac{1}{yz+9}+\frac{1}{zx+9}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwars ta có:

$$x^3\left(\frac{1}{xy+9}+\frac{1}{zx+9}\right)\ge x^3.\frac{4}{xy+zx+18}=\frac{4x^3}{x(y+z)+18}=\frac{4x^3}{x(9-x)+18}=\frac{4x^3}{9x-x^2+18}.$$

Tương tự ta có

$$y^3\left(\frac{1}{xy+9}+\frac{1}{yz+9}\right)\ge\frac{4y^3}{9y-y^2+18}$$

$$z^3\left(\frac{1}{yz+9}+\frac{1}{zx+9}\right)\ge\frac{4z^3}{9z-z^2+18}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$VT\ge\frac{4x^3}{9x-x^2+18}+\frac{4y^3}{9y-y^2+18}+\frac{4z^3}{9z-z^2+18}.$$

Vì $x,y,z>0$ và $x+y+z=9\Rightarrow x,\ y,\ z\in(0;9)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4t^3}{9t-t^2+18}$ trên khoảng $(0;9)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 3 là $y=\dfrac{11}{4}t-\dfrac{21}{4}$.

Ta có:

$$\frac{4t^3}{9t-t^2+18}-\left(\frac{11}{4}t-\frac{21}{4}\right)=\frac{27t^3-120t^2-9t+378}{-4\left(t^2-9t-18\right)}=\frac{3(9t+14)(t-3)^2}{-4\left(t^2-9t-18\right)}\ge 0,\forall\, t\in(0;9)$$

$$\Rightarrow\frac{4t^3}{9t-t^2+18}\ge\frac{11}{4}t-\frac{21}{4},\forall\, t\in(0;9).$$

Vì $x,\ y,\ z \in \left(0;9\right)$ do đó ta có

$$\frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} \ge \frac{11}{4}x - \frac{21}{4}$$

$$\frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} \ge \frac{11}{4}y - \frac{21}{4}$$

$$\frac{4z^3}{9z - z^2 + 18} \ge \frac{11}{4}z - \frac{21}{4}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} + \frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} + \frac{4z^3}{9z - z^2 + 18} \ge \frac{11}{4}\left(x + y + z\right) - \frac{63}{4}$$

$$\Rightarrow VT \ge \frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} + \frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} + \frac{4z^3}{9z - z^2 + 18} \ge 9.$$

Hay $\dfrac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \dfrac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \dfrac{z^3 + x^3}{zx + 9} \ge 9.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 3$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Phương pháp 4. Sử dụng phương pháp đạo hàm theo từng biến

Tìm cực trị của biểu thức *P* có chứa ba biến x, y, z trên *K*, ta thực hiện theo các bước

Bước 1: Xem $P(x,y,z)$ là một hàm số theo biến x còn y,z là hằng số. Khảo sát hàm này trên *K*, ta được $P(x,y,z) \geq g(y,z)$ (hoặc $P(x,y,z) \leq g(y,z)$).

Bước 2: Xem $g(y,z)$ là một hàm số theo biến y còn z là hằng số. Khảo sát hàm $g(y,z)$ trên *K*, ta được $g(y,z) \geq h(z)$ (hoặc $g(y,z) \leq h(z)$).

Bước 3: Khảo sát hàm $h(z)$ trên *K*, ta tìm được cực trị của hàm số $h(z)$, chú ý $P(x,y,z) \geq g(y,z) \geq h(z)$ (hoặc $P(x,y,z) \leq g(y,z) \leq h(z)$) khi đó ta sẽ tìm được cực trị của *P*.

Bài 27. Cho ba số thực $x, y, z \in [1;3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{36x}{yz} + \frac{2y}{xz} + \frac{z}{xy}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{36x}{yz} + \frac{2y}{zx} + \frac{z}{xy}, x \in [1;3]$, y, z là tham số.

Ta có

$$f'(x) = \frac{36}{yz} - \frac{2y}{zx^2} - \frac{z}{x^2y} = \frac{36x^2 - 2y^2 - z^2}{x^2yz} \geq \frac{36 - 2.9 - 9}{x^2yz} > 0.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$ nên

$$f(x) \geq f(1) = \frac{36}{yz} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{y}, \forall x \in [1;3].$$

Đặt $g(y) = \frac{36}{yz} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{y}, y \in [1;3]$, z là tham số.

Ta có $g'(y) = -\frac{36}{y^2z} + \frac{2}{z} - \frac{z}{y^2} = \frac{-36 + 2y^2 - z^2}{y^2z} \leq \frac{-36 + 2.9 - 1^2}{y^2z} < 0$ suy ra $g(y)$ nghịch biến trên $[1;3]$

$$\Rightarrow g(y) \ge g(3) = \frac{12}{z} + \frac{6}{z} + \frac{z}{3} = \frac{18}{z} + \frac{z}{3}, \forall y \in [1;3].$$

Xét hàm số $h(z) = \frac{18}{z} + \frac{z}{3}, z \in [1;3]$, ta có $h'(z) = -\frac{18}{z^2} + \frac{1}{3} \le -\frac{18}{9} + \frac{1}{3} < 0.$

$\Rightarrow h(z)$ nghịch biến trên $[1;3]$ $\Rightarrow h(z) \ge h(3) = \frac{18}{3} + 1 = 7$.

Vậy $P \ge 7$ với mọi $x, y, z \in [1;3]$.

Do đó $\text{Min}\, P = 7$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = z = 3 \end{cases}$.

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn điều kiện $4a + 2b + c = 11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $4a + 2b + c = 11$ ta có $a = \frac{11 - 2b - c}{4}$.

Khi đó P trở thành $P = \frac{4}{11 - 2b - c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Xét hàm số $f(b) = \frac{4}{11 - 2b - c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ trên $[1;2]$.

Ta có

$$f'(b) = \frac{8}{(11 - 2b - c)^2} - \frac{2}{b^2} = \frac{2(4b + c - 11)(11 - c)}{(11 - 2b - c)^2 b^2} < 0, \ \forall b, c \in [1;2].$$

Do đó $f(b)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;2]$

$$\Rightarrow f(b) \ge f(2) = \frac{4}{7 - c} + \frac{3}{c} + 1, \ \forall b \in [1;2].$$

Xét hàm số $g(c) = \frac{4}{7 - c} + \frac{3}{c} + 1$ trên $[1;2]$, ta có

$$g'(c) = -\frac{3}{c^2} + \frac{4}{(c - 7)^2} = \frac{c^2 + 42c - 147}{(c - 7)^2 c^2} < 0, \forall c \in [1;2].$$

Do đó $g(c)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;2]$

$$\Rightarrow g(c) \geq g(2) = \frac{33}{10},\ \forall c \in [1;2].$$

Do đó $P \geq \frac{33}{10}, \forall a,b,c \in [1;2]$.

Vậy $Min\,P = \frac{33}{10}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = c = 2 \end{cases}$.

Bài 29. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012(xy + yz + zx)}.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012(xy + yz + zx)}$ trên $[1;3]$.

Ta có

$$f'(x) = -\frac{25}{4}\frac{(y+z)^2(6x + 503y + 503z)}{\left(3x^2 + 503xy + 503yz + 503xz\right)^2} < 0 \text{ vì } x, y, z \in [1;3].$$

Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;3]$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(3) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)^2}{27 + 1509y + 1509z + 503yz}, \forall x \in [1;3].$$

Đặt $g(y) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)^2}{27 + 1509y + 1509z + 503yz}$, ta có:

$$g'(y) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)\left(54 + 1509y + 503yz + 1509z - 503z^2\right)}{(27 + 1509y + 1509z + 503yz)^2}$$

Dễ thấy $54 + 1509y + 503yz + 1509z - 503z^2 = 54 + 1509y + 503yz + 503z(3-z) > 0,\ \forall y, z \in [1;3]$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)\left(54 + 1509y + 503yz + 1509z - 503z^2\right)}{(27 + 1509y + 1509z + 503yz)^2} > 0,\ \forall y, z \in [1;3].$$

Do đó $g(y)$ là hàm số đồng biến trên $[1;3]$

$$\Rightarrow g(y) \ge g(1) = \frac{25}{16}\frac{(1+z)^2}{384+503z}, \forall y \in [1;3].$$

Đặt $h(z) = \frac{25}{16}\frac{(1+z)^2}{384+503z}$, ta có $h'(z) = \frac{25}{16}\frac{(1+z)(256+503z)}{(384+503z)^2} > 0, \forall z \in [1;3]$.

Do đó $h(z)$ là hàm số đồng biến trên $[1;3] \Rightarrow h(z) \ge h(1) = \frac{25}{3548}$, , $\forall z \in [1;3]$.

Vậy $P = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012(xy+yz+zx)} \ge \frac{25}{3458}, \forall x,y,z \in [1;3]$ hay $Min\,P = \frac{25}{3548}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 3;\ y = z = 1$.

Bài 30. Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow 0 < c \le \sqrt{ab}$ và $a < b + c \le 2b$.

Xét hàm số $f(c) = 2\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} + 2\frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 3$ trên khoảng $\left(0;\sqrt{ab}\right]$.

Ta có $f'(c) = -\frac{2b}{c^2} + \frac{2}{a} + \frac{a}{c^2} - \frac{1}{b} = (a-2b)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab}\right) \le 0, \forall c \in \left(0;\sqrt{ab}\right]$ và $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}$

do đó hàm số $f(c)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{ab}\right]$

$$\Rightarrow f(c) \ge \max\{f(a), f(b)\} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab} \ge 0$$

(Vì $c = \min\{a,b,c\}$ và $\left[\begin{array}{l} 0 < c \le a \le \sqrt{ab} \\ 0 < c \le b \le \sqrt{ab} \end{array}\right.$).

Vậy $f(c) \ge 0, \forall c \in \left(0;\sqrt{ab}\right]$ hay $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi tam giác là tam giác đều.

Phương pháp 5. Sử dụng hàm số đặc trưng

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{ab+\sqrt{a^4+4a^2b^2}}{a^2+3b^2}+\frac{bc+\sqrt{b^4+4b^2c^2}}{b^2+3c^2}.$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số thực dương do đó ta có

$$P=\frac{ab+\sqrt{a^4+4a^2b^2}}{a^2+3b^2}+\frac{bc+\sqrt{b^4+4b^2c^2}}{b^2+3c^2}=\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{1+4\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1+3\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{\frac{c}{b}+\sqrt{1+4\left(\frac{c}{b}\right)^2}}{1+3\left(\frac{c}{b}\right)^2}.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}$, vì a, b, c là các số thực dương $\Rightarrow x, y>0.$ Khi đó

$$P=\frac{x+\sqrt{1+4x^2}}{1+3x^2}+\frac{y+\sqrt{1+4y^2}}{1+3y^2}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}-x}+\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}-y}.$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{1+4t^2}-t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}-1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (vì $t>0$).

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}, \forall t>0$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}-x}+\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}-y}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\le\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}, \forall x, y>0.$$

Vậy $\text{Max}\,P = \frac{4}{\sqrt{3}}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases} a = 2\sqrt{3}b \\ b = 2\sqrt{3}c \end{cases}$.

Bài 32. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$, ta có:

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}+\frac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}+\frac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$ nên $a,b,c\in(0;1)$.

Ta có

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}=\frac{a\left(a^2-1\right)^2}{1-a^2}=-a^3+a.$$

Do đó bất đẳng thức được biến đổi thành

$$\left(-a^3+a\right)+\left(-b^3+b\right)+\left(-c^3+c\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+x$ trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+1\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vì $x\in(0;1)$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}, \forall x\in(0;1)$.

Vì $a,b,c\in(0;1)\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Do đó

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}+\frac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}+\frac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 33. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}.$$

Lời giải

Đặt $a=x^3,b=y^3,z=c^3$ vì $\begin{cases}x,y,z>0\\ xyz=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$. Khi đó P trở thành

$$P=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$=(a+b)\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}+(b+c)\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2}+(c+a)\frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}$$

$$=(a+b)\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1}+(b+c)\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{b}{c}+1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2+\frac{b}{c}+1}+(c+a)\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}+1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}+1}\text{ (vì } a,b,c>0\text{)}.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$ trên $(0;+\infty)$.

Khi đó với $t>0$ ta chứng minh được $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}\ge\frac{1}{3}$, thật vậy

$$\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\left(t^2-t+1\right)\ge t^2+t+1\text{ (vì } t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\ \forall t>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2(t-1)^2\ge 0\text{ (luôn đúng).}$$

Vì $a,b,c>0\Rightarrow\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}>0$, do đó ta có $f\left(\frac{a}{b}\right)\ge\frac{1}{3}; f\left(\frac{b}{c}\right)\ge\frac{1}{3}$ và $f\left(\frac{c}{a}\right)\ge\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)=\frac{2}{3}(a+b+c)\text{ (vì } a,b,c>0\text{)}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{3}.3\sqrt[3]{abc} = 2.$$

Vậy $\text{Min}\, P = 2$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Phương pháp 6. Chuẩn hóa bất đẳng thức

Để hiểu được cách chuẩn hóa bất đẳng thức ta cần chú ý đến định lý sau:

Nếu $f(a,b,c)$ *là một hàm thuần nhất bậc k. Khi đó với* $t \in \mathbb{R}, t > 0$ *bất kỳ ta có* $f(a,b,c) \geq 0$ *tương đương với* $f(ta,tb,tc) \geq 0$..

Chứng minh.

Vì $f(a,b,c)$ là một hàm thuần nhất bậc k nên:

$$f(a,b,c) = t^k f(a,b,c)$$

Do đó với $t \in \mathbb{R}, t > 0$ *ta có*

$$f(ta,tb,tc) \geq 0 \Leftrightarrow t^k f(a,b,c) \geq 0 \Leftrightarrow f(a,b,c) \geq 0.$$

Nhận xét: Từ mệnh đề trên, để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất $f(a,b,c) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $f(ta,tb,tc) \geq 0$ với ta,tb,tc thỏa mãn một điều kiện đặc biệt và $t > 0$ nào đó, do đó việc chọn được số $t > 0$ thích hợp sẽ biến đổi bài toán bất đẳng thức đang cần chứng minh trở thành một bài toán mới đơn giản hơn, giúp ta giảm bớt được vất vả trong việc biến đổi các biểu thức. Việc làm như trên được gọi là chuẩn hóa bất đẳng thức thuần nhất.

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \text{ (Olimpic 30-4-2006).}$$

Giả sử giá trị lớn nhất của biểu thức P tìm được là A, do đó:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \leq A, \forall a,b,c > 0.$$

Đặt $f(a,b,c) = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2}$, khi đó $f(a,b,c) \leq A$ là một bất đẳng thức thuần nhất do đó tồn tại $t > 0$ sao cho $f(ta,tb,tc) \leq A$ thì $f(a,b,c) \leq A$.

Với $a, b, c > 0$ chọn số $t > 0$ thỏa mãn $ta + tb + tc = 1$ (khi đó $t = \frac{1}{a+b+c} > 0$).

Đặt $a_1 = ta, b_1 = tb, c_1 = tc$. Khi đó bài toán bất đẳng thức trên trở thành:

Cho $a_1, b_1, c_1 > 0$ thỏa mãn $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a_1(b_1+c_1)}{(b_1+c_1)^2+a_1^2} + \frac{b_1(c_1+a_1)}{(c_1+a_1)^2+b_1^2} + \frac{c_1(a_1+b_1)}{(a_1+b_1)^2+c_1^2}.$$

Do đó để không nhầm lẫn trong cách hiểu và tránh làm phức tạp trong việc trình bày lời giải của bài toán ta có thể dùng bộ số (a,b,c) thay cho bộ số (a_1, b_1, c_1).

Lời giải

Chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Ta có:

$$P = \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2} + \frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2} + \frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2}$$

Sử dụng BĐT *AM-MG* ta có:

$$2a(1-a) \le \left(\frac{2a+1-a}{2}\right)^2 = \frac{(a+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 1-2a+2a^2 = 1-2a(1-a) \ge 1-\frac{(a+1)^2}{4} = \frac{(1-a)(a+3)}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2} \le \frac{4a(1-a)}{(1-a)(a+3)} = \frac{4a}{a+3} = 4\left(1-\frac{3}{a+3}\right).$$

Tương tự ta có: $\frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2} \le 4\left(1-\frac{3}{b+3}\right)$ và $\frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2} \le 4\left(1-\frac{3}{c+3}\right)$.

Do đó:

$$P \le 4\left(1-\frac{3}{a+3}\right) + 4\left(1-\frac{3}{b+3}\right) + 4\left(1-\frac{3}{c+3}\right) = 12-12\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\right).$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3} \ge \frac{9}{a+b+c+9} = \frac{9}{10}.$$

Vậy

$$P \le 12-12.\frac{9}{10} = \frac{6}{5}.$$

Suy ra: $\max P = \dfrac{6}{5}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c$.

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\frac{7(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} - \frac{9abc}{(a+b+c)^3} \le 2.$$

Lời giải

Chuẩn hóa $a + b + c = 1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$7(ab+bc+ca) - 9abc \le 2$$

$$\Leftrightarrow 7a(1-a) + bc(7-9a) \le 2 \qquad (1).$$

Giả sử $0 < a \le b \le c$. Vì $a + b + c = 1 \Rightarrow 0 < a \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow 7 - 9a > 0$.

Ta có

$$bc \le \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(1-a)^2}{4}.$$

Suy ra

$$7a(1-a) + bc(7-9a) \le 7a(1-a) + \frac{(1-a)^2}{4}(7-9a)$$

$$\Leftrightarrow 7a(1-a) + bc(7-9a) \le \frac{1}{4}\left(-9a^3 - 3a^2 + 5a + 7\right) \text{ với } a \in \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

Do đó để chứng minh (1) đúng ta cần chứng minh

$$\frac{1}{4}\left(-9a^3 - 3a^2 + 5a + 7\right) \le 2 \text{ với } a \in \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

Thật vậy

$$\frac{1}{4}\left(-9a^3 - 3a^2 + 5a + 7\right) \le 2 \Leftrightarrow 9a^3 + 3a^2 - 5a + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(3a-1)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng với } a \in \left(0; \frac{1}{3}\right]\text{).}$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài 36. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge 3+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2} \quad (1).$$

Lời giải

Áp dụng BĐT *Cauchy-Schwars* ta có:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Do đó để chứng minh BĐT (1) đúng ta cần chứng minh BĐT sau đúng:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\ge 3+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2} \quad (2)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Khi đó BĐT (2) trở thành:

$$\frac{1}{ab+bc+ca}\ge 3+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+bc+ca}\ge 5-6(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 6(ab+bc+ca)^2-5(ab+bc+ca)+1\ge 0 \text{ (vì } a, b, c>0 \Rightarrow ab+bc+ca>0\text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \left[3(ab+bc+ca)-1\right]\left[2(ab+bc+ca)-1\right]\ge 0$$

Luôn đúng vì $ab+bc+ca\le \frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$.

Bài 37. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\ge \frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

Lời giải

Chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\ge \frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)^2 \quad (1)$$

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}+1$$

Để chứng minh (1) đúng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}+1\ge\frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)^2\ \ (2)$$

Ta có

$$(2)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-9\right)\left[2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\right]\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vì $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}=9$.

Phương pháp 7. Phương pháp dồn biến

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $f\left(x,y,z\right)\ge 0$. Khi đó để chứng minh bất đẳng thực hiện cách bước:

Bước 1. Chứng minh $f\left(x,y,z\right)\ge f\left(t,t,z\right)$, trong đó $t=\dfrac{x+y}{2}$; $t=\sqrt{xy}$; $t=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$;...

Bước 2. Chứng minh $f\left(t,t,z\right)\ge 0$.

Kết luận: $f\left(x,y,z\right)\ge 0$.

Bài 38. Cho $a,\ b,\ c\in\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{7}{5}\ \left(1\right).$$

Lời giải

Đặt $f\left(a,b,c\right)=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$.

Với vai trò như nhau không làm mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}$.

Ta có $f\left(a,b,\sqrt{ab}\right)=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+a}=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Xét $f\left(a,b,c\right)-f\left(a,b,\sqrt{ab}\right)$, ta có

$$f\left(a,b,c\right)-f\left(a,b,\sqrt{ab}\right)=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}==\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}-c\right)^2}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\ge 0.$$

Ta cần chứng minh $f\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\ge\dfrac{7}{5}$ với $a,\ b\in\left[\dfrac{1}{3};3\right]$. Xét

$$\frac{a}{a+b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{7}{5}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}+\frac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+1}-\frac{7}{5}$$

Đặt $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\Rightarrow x\in\left[1;3\right]$ (vì $a,\ b\in\left[\dfrac{1}{3};3\right]$), do đó

$$\frac{a}{a+b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{7}{5}=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{7}{5}=\frac{(3-x)\left(2x^2-2x+1\right)}{5\left(x^2+1\right)(x+1)}\geq 0,\ \forall x\in[1;3].$$

hay $f\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\geq\frac{7}{5}$ với $a,\ b\in\left[\frac{1}{3};3\right]$.

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Bài 39. Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}\geq\frac{25}{4}.$$

Lời giải

Đặt $f(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}$.

Ta có $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1}$.

Xét $f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$, ta có

$$f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}-\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(\frac{1}{bc}-\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\right).$$

Với vai trò như nhau không làm mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Vì $abc=1\Rightarrow\begin{cases}bc\leq 1\\ \frac{1}{bc}\geq 1\end{cases}$. Sử dụng BĐT AM-GM ta có

$$\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\leq\frac{13}{\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)}=\frac{13}{16}<1.$$

Do đó $f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\geq 0$.

Ta cần chứng minh $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\geq\frac{25}{4}$.

Đặt $t=\sqrt{bc},\ t\in(0;1]\Rightarrow a=\dfrac{1}{bc}=\dfrac{1}{t^2}$, ta chứng minh

$$\frac{1}{\frac{1}{t^2}}+\frac{2}{t}+\frac{13}{\frac{1}{t^2}+2t+1}\ge\frac{25}{4}\Leftrightarrow t^2+\frac{2}{t}+\frac{13t^2}{2t^3+t^2+1}\ge\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2\left(8t^4+20t^3-18t^2-9t+8\right)}{4t\left(2t^3+t^2+1\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2\left[2\left(2t^2-1\right)^2+5t(2t-1)^2+2\left(5t^2-7t+3\right)\right]}{4t\left(2t^3+t^2+1\right)}\ge 0$$ (luôn đúng với $t\in(0;1]$).

hay $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\ge\dfrac{25}{4}$ suy ra $f(a,b,c)\ge\dfrac{25}{4}$.

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.